COURS COMPLET
D'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

PAR

EUGÈNE ROUCHÉ
PROFESSEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A L'ÉCOLE CENTRALE,
RÉPÉTITEUR DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE.

TROISIÈME ANNÉE

TEXTE

PARIS
LIBRAIRIE CHARLES DELAGRAVE
58, RUE DES ÉCOLES, 58

COURS COMPLET

D'ENSEIGNEMENT SECONDAIRE SPÉCIAL

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE

DESCRIPTIVE

Tout exemplaire de cet ouvrage non revêtu de ma griffe sera réputé contrefait.

Ch. Delagrave

PRÉFACE DE L'AUTEUR

> Lorsqu'on étudie un livre sur le Trait, il est nécessaire de faire tous les dessins. Le crayon a sa logique ; il montre les difficultés et achève les explications.
>
> De la Gournerie (*Traité de perspective*).

Cet ouvrage est destiné aux élèves de l'enseignement secondaire spécial et aux personnes qui veulent étudier la géométrie descriptive en vue de ses applications. Il ne faut donc chercher ici ni problème curieux ni théorie géométrique d'un ordre élevé ; les questions de ce genre ont dû céder la place à des exercices pratiques. Mais si j'ai réduit la théorie aux notions indispensables pour l'intelligence des constructions, j'ai, en revanche, donné un entier développement à l'exposition et à la discussion des tracés graphiques ; c'est là que réside, à vrai dire, la géométrie descriptive ; aussi, me suis-je efforcé de mettre en lumière le degré de généralité et de précision que chaque tracé comporte ; on n'acquiert, en effet, que par une judicieuse critique cet art de combiner les lignes qui rend les épures claires et les solutions élégantes.

En suivant le même ordre d'idées, j'ai été conduit à faire une part très-large aux applications. On n'apprend pas à se rendre compte des formes en raisonnant toujours sur des lignes et des surfaces indéfinies; pour faire des progrès rapides, il faut, presque en commençant, représenter des corps solides, simples, convenablement choisis et analogues à ceux qu'on rencontre en stéréotomie dès les premiers pas. Les murs, les plates-bandes, les encoignures, les assemblages de charpente offriront au lecteur des exemples faciles et d'autant plus instructifs qu'ils lui feront entrevoir le but et l'utilité de la géométrie descriptive; la perspective cavalière et la théorie des ombres, ces deux compléments indispensables de l'art de représenter les corps, m'ont fourni une seconde série d'exercices intéressants.

Les trois dernières planches de l'atlas m'ont été communiquées par M. Muret, élève de M. Bardin et digne continuateur de l'œuvre de ce maître regretté. Les données des questions 7, 8, 9 et 11 de la page 179 ont été relevées exactement sur les modèles en plâtre de la collection Bardin et Muret. On peut se procurer ces plâtres à un prix très-modique chez M. Delagrave, seul éditeur de cette précieuse collection. En comparant son épure avec le modèle en relief, l'élève apprendra à lire promptement dans l'espace; il pourra d'ailleurs relever lui-même les données à l'aide d'un compas, d'un fil à plomb et d'un double décimètre. Un même modèle se prête à des recherches très-variées; par exemple, dans la question 7 de la page 179, au lieu d'enlever la pyramide, on supprimera le prisme, ou encore on conservera les deux corps à la fois ; ce sont là des exercices de ponctuation très-instructifs et qui exigent bien peu de temps, lorsqu'on a déjà fait l'épure à un premier point de vue. Enfin, on peut éclairer le modèle avec un flambeau, reporter sur l'épure la position de ce point lumineux, et retrouver par les tracés de la géométrie descriptive, les ombres qu'on aura observées. En déplaçant le flambeau, on suivra avec intérêt les déformations de l'ombre, et l'on se rendra sans peine un compte exact de certains effets qui, faute d'une étude attentive, pourraient paraître surprenants.

ÉLÉMENTS

DE

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

INTRODUCTION

Objet de la géométrie descriptive.

1. La Géométrie descriptive donne des méthodes pour représenter exactement sur un seul plan tout corps susceptible d'une définition précise, et pour déduire de cette représentation les véritables grandeurs des diverses parties du corps que l'on considère.

C'est à l'aide de pareils dessins, faits sur des aires planes, que les tailleurs de pierre et les charpentiers parviennent à donner aux matériaux solides des formes déterminées.

La Géométrie descriptive est donc aussi utile à l'ouvrier qui exécute un projet qu'à l'ingénieur qui l'a conçu. Ses principales applications sont la perspective, la théorie des ombres, la charpente, la coupe des pierres, le tracé des routes dans les pays accidentés, le défilement dans l'art des fortifications, etc., etc. La perspective et la détermination rigoureuse des ombres dans les dessins sont même, à proprement parler, moins des applications que des compléments indispensables de l'art de représenter les corps.

Il convient de donner au lecteur, dès le début, une première idée des méthodes de la Géométrie descriptive; tel est l'objet de cette introduction. Mais pour que cet aperçu soit clair, il est indispensable d'établir ou de rappeler quelques définitions.

Définitions préliminaires.

2. On appelle *projection* d'un point A sur un plan H (Pl. I, fig. 1), le pied a de la perpendiculaire abaissée de ce point sur ce plan. Le plan H reçoit le nom de *plan de projection* et la perpendiculaire Aa celui de *projetante* du point A.

3. La projection d'une ligne quelconque ABC..... sur un plan H est le lieu des projections a, b, c,... des divers points de cette ligne. Les projetantes Aa, Bb, Cc..., étant perpendiculaires au même plan H, sont parallèles entre elles; elles forment donc une surface cylindrique qu'on nomme le *cylindre projetant* de la ligne ABC....

Lorsque la figure DEFG.... que l'on considère est située dans un plan P perpendiculaire au plan de projection H, le cylindre projetant n'est autre que le plan P lui-même qui prend le nom de *plan projetant*, et la figure DEFG.... se projette tout entière sur la droite mn suivant laquelle le plan P coupe le plan de projection.

C'est ce qui arrive en particulier pour une droite quelconque. Ainsi, *la projection d'une ligne droite* KL *est une ligne droite kl;* à moins que la droite considérée ne soit, comme LL_1, perpendiculaire au plan de projection, auquel cas sa projection se réduit à un point l.

4. *La projection d'une droite* KL_1 *parallèle au plan de projection est une droite* l *égale et parallèle à la première*, car la figure KL_1kl est évidemment un rectangle.

Plus généralement, *la projection d'une figure quelconque située dans un plan parallèle au plan de projection est une figure égale à la première;* car ces deux figures sont les sections du cylindre projetant par deux plans parallèles, et l'on sait que de telles sections sont superposables.

5. On appelle *trace d'une droite* AB sur le plan de projection H (Pl. I, fig. 2), le point A où cette droite perce ce plan.

On appelle *trace d'un plan* P sur le plan de projection H la droite CD suivant laquelle le plan P coupe le plan H.

Quand deux plans P *et* Q *sont parallèles, leurs traces* CD *et* EF *sur un même plan de projection* H *sont parallèles;* car ce sont les intersections de deux plans parallèles P et Q par un troisième H.

Il résulte de là que, *si deux droites* KL *et* MN *sont parallèles, leurs projections* kl *et* mn *sur un même plan* H *sont parallèles*. En effet, ces projections sont les traces des deux plans projetants LK*k*, NM*m;* or, ces plans sont parallèles, car la droite KL et la projetante K*k* qui déterminent le premier plan sont respectivement parallèles à la droite MN et à la projetante M*m* qui déterminent le second plan.

Ces quelques principes nous suffiront pour donner un premier aperçu des méthodes de la Géométrie descriptive.

Représentation d'un point.

6. Pour faire connaître la position d'un point M dans l'espace (Pl. I, fig. 3), il suffit de donner la projection m de ce point sur le plan H de la feuille de dessin et sa hauteur Mm au-dessus de ce plan. Cette hauteur se nomme la *cote* du point M; pour l'indiquer graphiquement, on trace sur la feuille de dessin qu'on appelle *plan horizontal de projection*, une droite indéfinie LT qu'on nomme *ligne de terre;* puis, on abaisse, sur cette droite, la perpendiculaire $m\mu$ que l'on prolonge d'une longueur $\mu m'$ égale à la cote Mm du point M. Ce point se trouve ainsi complétement défini de position.

La figure 3 est une perspective destinée à faire saisir aisément les explications qui précèdent. La figure 4 ne contient que les lignes tracées sur la feuille de dessin; on lui donne le nom d'*épure*. *Lire une épure*, c'est comprendre d'après ce dessin la position exacte du point dans l'espace ; en un mot, c'est reconstruire mentalement la figure 3 à l'aide de la figure 4. Ainsi, à la vue de la figure 4, il faut immédiatement imaginer une perpendiculaire élevée par le point m sur la feuille de dessin et égale à $\mu m'$; l'extrémité de cette perpendiculaire est le point représenté sur l'épure 4.

Représentation d'un polyèdre.

7. Pour représenter un polyèdre, il suffira d'indiquer les projections et les cotes de ses divers sommets, puis d'unir dans un ordre convenable ces projections par des droites, qui seront d'après cela (n° 3) les projections des diverses arêtes du polyèdre.

Supposons, par exemple, qu'on veuille représenter un tronc de prisme droit (Pl. I, fig. 5), dont la base triangulaire ou section droite ABC repose sur le plan horizontal ; on donne les côtés de cette base et les longueurs des trois arêtes latérales, AD, BE, CF.

La base ABC pourra être placée immédiatement sur l'épure (fig. 6); il suffira de construire un triangle abc ayant ses côtés égaux aux longueurs données de AB, BC, CA. Les arêtes latérales, AD, BE, CF, étant perpendiculaires au plan de la feuille de dessin, auront pour projections respectives (n° 3) les points a, b, c, de telle sorte que le triangle abc représentera à la fois la base inférieure et la projection de la base supérieure du tronc. Pour achever la représentation du solide, il ne restera qu'à indiquer sur l'épure les cotes des sommets D, E, F ; on prendra donc sur la feuille de dessin une ligne de terre LT à volonté (nous l'avons menée ici parallèlement au côté ab du triangle abc); puis on abaissera sur cette ligne les perpendiculaires $a\alpha$, $b\beta$, $c\gamma$, sur lesquelles on portera des longueurs $\alpha d'$, $\beta e'$, $\gamma f'$ respectivement égales aux longueurs données des arêtes latérales AD, BE, CF.

Exécution du solide.

8. Voyons maintenant comment on peut déduire du dessin qui précède les éléments nécessaires pour donner à un bloc de pierre la forme et les dimensions du tronc de prisme considéré.

D'abord on a en vraie grandeur sur l'épure la base inférieure *abc*.

La face latérale ABDE s'obtient immédiatement; il suffit de compléter le trapèze rectangle $\alpha\,\beta\,e'\,d'$ en menant la droite $e'd'$. Ce trapèze rectangle a, en effet, sa base $\alpha\beta$ et ses côtés parallèles $\alpha d'$, $\beta e'$ respectivement égaux à la base AB et aux côtés parallèles AD et BE de la face ABDE.

Cherchons la vraie grandeur de la face BCFE. C'est un trapèze rectangle dont les côtés parallèles sont égaux à $\beta e'$ et $\gamma f'$ et dont la base est égale à bc; que l'on prenne donc sur la ligne de terre une longueur βc_1 égale à bc, qu'on élève la perpendiculaire $c_1 f_1$ égale à $\gamma f'$, et que l'on mène $e'f_1$, la figure obtenue $\beta e' f_1 c_1$ sera le trapèze rectangle demandé.

La vraie grandeur de la troisième face latérale ACFD s'obtiendra d'une manière analogue, en prenant αc_2 égale à ac et élevant la perpendiculaire $c_2 f_2$ égale à $\gamma f'$.

9. La connaissance de la base inférieure et de deux faces latérales suffit pour la taille de la pierre, qu'on exécute de la manière suivante :

Les pierres arrivant de la carrière sous la forme de parallélipipèdes rectangles, on choisira un parallélipipède *capable* du prisme tronqué, c'est-à-dire un parallélipipède MNPQRSTU dont la longueur surpasse un peu celle de la plus grande des arêtes latérales du tronc de prisme et dont la base MNPQ puisse contenir la section droite *abc* de ce corps (Pl. I, fig. 7).

Après avoir bien dressé la base MNPQ du bloc de façon qu'une règle s'y applique exactement dans tous les sens, on placera sur ce plan un morceau de carton ou de zinc découpé sur le triangle *abc* de l'épure ; ce patron prend le nom de *panneau de la face abc ;* on fera glisser la pierre noire le long du contour de ce panneau, de sorte que, lorsqu'on aura enlevé le panneau, le triangle ABC se trouvera dessiné sur la pierre. Alors par la droite AC on mènera un plan perpendiculaire au plan ABC ; on se sert à cet effet d'une équerre en fer ou en bois (fig. 8) XOY, et l'on abat la pierre de façon que le côté OY de l'équerre restant appliqué sur le plan ABC et le sommet O glissant le long de AC, le côté OX s'appuie sans cesse sur le plan que l'on taille. Ce plan étant taillé, on y appliquera un carton découpé sur le trapèze $\alpha c_2 f_2 d'$ de l'épure, en ayant soin de disposer ce second panneau de telle sorte que αc_2 coïncide avec AC, α étant en A et c_2 en C ; on fera alors glisser la pierre noire le long du contour de ce panneau de manière à dessiner sur la pierre la face latérale ACFD. La face latérale ABED se taillera et se dessinera d'une façon analogue, et il ne restera plus alors qu'à faire apparaître la troisième face latérale BCFE et la seconde base FDE. On obtiendra la face BCFE en abattant la pierre de manière qu'une règle s'appuie constamment sur les droites EB et CF qui sont déjà tracées; on pourra alors marquer à la pierre noire, la droite EF et vérifier si le trapèze BCFE ne diffère pas du panneau $\beta c_1 f_1 e'$ relevé sur l'épure. Enfin, on abattra l'excédant de pierre situé au delà du plan FDE, en tenant la règle sans cesse appuyée sur le contour de ce triangle.

Nous engageons les commençants à exécuter toutes ces opérations sur un bloc de plâtre, après avoir reproduit l'épure à une échelle plus grande. Un tel exercice constitue la meilleure préparation à l'étude de la géométrie descriptive.

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION DU POINT

Représentation d'un point par ses projections sur deux plans rectangulaires.

10. Le mode de représentation que nous avons expliqué au n° 6 peut être conçu d'une autre manière, moins simple pour un point isolé, mais en général plus avantageuse pour un système de points formant une figure déterminée.

Soit M un point quelconque de l'espace (Pl. II, fig. 9), représenté par sa projection horizontale m et sa cote $\mu m'$. Replions la partie postérieure H de la feuille de dessin à angle droit suivant LT de manière à l'amener dans la position VTL. Dans ce mouvement, qui est indiqué sur la figure par la flèche f, la droite $\mu m'$ reste perpendiculaire à la ligne de terre, et lorsque, après avoir tourné d'un angle droit, elle occupe la position μm_1, elle se trouve perpendiculaire à la fois aux deux droites μT et μm du plan H et par suite perpendiculaire à ce plan. Elle est donc alors égale et parallèle à la projetante Mm, de sorte que la figure M$m\mu m_1$ est un rectangle. Or $m\mu$ étant perpendiculaire à la fois à LT et à μm_1, est perpendiculaire au plan V ; donc il en est de même de sa parallèle Mm_1, et par suite le point m_1 est la projection du point M sur le plan V.

D'après cela l'on peut dire :

« Pour représenter un point quelconque M de l'espace, « on le projette, en m et en m_1, sur deux plans rectangu- « laires H et V que l'on nomme, l'un H *plan horizontal*, « l'autre V *plan vertical*. Puis, pour n'avoir à dessiner « que sur un seul plan, on rabat par la pensée le plan « vertical V sur le prolongement H_1 du plan horizontal, au « moyen d'une rotation autour de leur intersection com- « mune LT qui reçoit le nom de *ligne de terre*. Ce mouve- « ment, qui est indiqué sur la figure par la flèche φ amène « la projection verticale m_1 dans la position m' ; et le « point M de l'espace se trouve finalement représenté sur « l'épure par sa projection horizontale m et par sa projec- « tion verticale rabattue m'. »

Pour abréger, au lieu de donner au point m' le nom de *projection verticale rabattue*, on dit simplement la *projection verticale ;* cela n'offre aucun inconvénient, à condition de ne pas oublier, toutes les fois qu'on raisonne, de redresser par la pensée le plan vertical et de se le figurer dans la position V perpendiculaire au plan horizontal.

Sur l'épure, on désigne la projection horizontale d'un point quelconque de l'espace, par une lettre minuscule telle que m et la projection verticale par la même minuscule accentuée m'. Enfin, pour désigner *dans les raisonnements* le point de l'espace lui-même, on emploie la lettre majuscule correspondante M, ou encore la notation (m, m').

Condition pour que deux points d'une épure soient les projections d'un même point de l'espace.

11. Il résulte des raisonnements qui précèdent que deux points m et m' d'une épure sont les projections d'un même point M de l'espace lorsque la droite $m\mu m'$ qui les joint est perpendiculaire à la ligne de terre LT.

La réciproque est vraie : si deux points m et m' d'une épure sont les projections d'un même point M de l'espace, la droite $m\mu m'$ qui les joint coupe la ligne de terre LT à angle droit.

Soient, en effet, m et m_1 les projections du point M sur les deux plans rectangulaires H et V. Le plan mMm_1 renfermant la perpendiculaire Mm au plan horizontal et la perpendiculaire Mm_1 au plan vertical est à la fois perpendiculaire aux deux plans de projection et par suite à leur intersection LT. Les droites μm et μm_1 suivant lesquelles il coupe les plans H et V sont donc perpendiculaires à la ligne de terre, et comme le rabattement du plan vertical V n'altère pas l'angle droit $m_1\mu$ T, la droite μm_1 se rabat sur le prolongement $\mu m'$ de la perpendiculaire μm à LT.

Ainsi : *Pour que deux points* m *et* m' *d'une épure soient les projections d'un même point* M *de l'espace, il faut et il suffit que la droite* mμm' *qui unit ces deux points soit perpendiculaire à la ligne de terre* LT.

On donne aux droites telles que $m\mu m'$ le nom de *lignes de rappel;* on les indique sur les épures par une suite de traits fins et séparés.

12. Nous avons appelé *cote* d'un point M de l'espace la distance Mm de ce point au plan horizontal, et nous avons vu que cette cote se trouve en vraie grandeur sur l'épure; c'est la distance $\mu m'$ de la projection verticale à la ligne de terre.

Nous nommerons *éloignement* d'un point M de l'espace la distance Mm_1 de ce point au plan vertical; cet éloignement se trouve aussi en vraie grandeur sur l'épure; c'est la distance μm de la projection horizontale à la ligne de terre : la figure $Mm_1\mu m$ étant un rectangle, on a, effet, $Mm_1 = m\mu$.

Ainsi : *La cote d'un point est égale à la distance de sa projection verticale à la ligne de terre, et son éloignement est égal à la distance de sa projection horizontale à la ligne de terre.*

Exemples : prisme et pyramide.

13. Avant d'aller plus loin, traitons quelques exemples simples :

Et d'abord, si l'on se reporte à la figure 6 de la Planche I, on voit que, dans notre nouvelle manière d'envisager la représentation du point, la figure $\alpha d'f'e'\beta\gamma$, qui n'avait primitivement pour objet que d'indiquer les cotes des sommets du tronc de prisme, prend une signification nouvelle. Les points d', e', f' sont les projections verticales des sommets D, E, F de la base supérieure, et par suite les droites $d'e'$, $e'f'$, $f'd'$ sont les projections verticales des côtés DE, EF, FD de cette base. Quant aux sommets A, B, C de la base inférieure, ils se projettent verticalement en α, β, γ en sorte que les côtés AB, BC, CA, ont pour projections verticales respectives les portions $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ de la ligne de terre ; enfin $\alpha d'$, $\beta e'$, $\gamma f'$ sont les projections verticales des trois arêtes latérales AD, BE, CF, et la figure totale $\alpha d'f'e'\beta\gamma$ représente la projection verticale du tronc de prisme.

14. Supposons qu'au lieu d'un tronc de prisme on veuille représenter un prisme droit dont on donne la base et la hauteur ; la base est un hexagone régulier et le prisme repose par sa base sur le plan horizontal (Pl. II, fig. 10).

On tracera immédiatement l'hexagone régulier $a\,b\,c\,d\,e\,f$ sur la feuille de dessin par le procédé indiqué en géométrie plane. Les arêtes latérales étant perpendiculaires au plan horizontal auront pour projections respectives les sommets a, b, c, d, e, f, de sorte que la projection horizontale de la base supérieure sera encore l'hexagone $abcdef$. La projection horizontale du prisme se réduira donc à cet hexagone.

Traçons maintenant une ligne de terre à volonté et cherchons la projection verticale du prisme. Pour cela, menons par *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, *f* des lignes de rappel, c'est-à-dire des perpendiculaires à la ligne de terre LT, et prenons sur ces perpendiculaires des longueurs $a'm'$, $b'n'$, $c'p'$, $d'q'$, $e'r'$, $f's'$, toutes égales à la hauteur donnée du prisme qui est la cote commune de tous les sommets de la base supérieure. Les points a', b', c', d', e', f' situés sur LT seront les projections verticales des sommets de la base inférieure, et les points m', n', p', q', r', s' qui, à cause de l'égalité de toutes les cotes, seront situés sur une même droite $m'q'$ parallèle à LT, seront les projections des sommets de la base supérieure. Enfin les arêtes latérales auront pour projections verticales $a'm'$, $b'n'$, $c'p'$, $d'q'$, $e'r'$, $f's'$.

Nous avons tracé deux de ces lignes $e'r'$ et $f's'$ *en points ronds*, tandis que les quatre autres sont des *lignes pleines* ; voici la raison de ce fait : imaginons un observateur regardant le plan vertical et placé à une très-grande distance en avant de ce plan ; il est clair que cet observateur verra toutes les arêtes latérales du prisme, sauf celle qui a son pied en *e* et celle qui a son pied en *f*; or, afin de concevoir plus aisément la forme du corps d'après sa projection verticale, on convient de tracer en ligne pleine les arêtes visibles pour un tel observateur et de tracer en points ronds les arêtes invisibles. On fait une convention analogue pour la projection horizontale : on suppose un observateur placé à une très-grande hauteur au-dessus du plan horizontal et l'on dessine en trait plein les arêtes que voit cet observateur et en points ronds les arêtes qui sont invisibles pour lui. On convient d'ailleurs que si deux arêtes, l'une visible, l'autre invisible, ont même projection, cette projection sera tracée en ligne pleine ; c'est ce qui explique pourquoi dans notre épure l'hexagone *abcdef*, qui représente la projection horizontale du prisme, est en lignes pleines ; cet hexagone est à la fois la projection horizontale des deux bases, et comme la base supérieure serait vue par un observateur situé très-haut au-dessus du plan horizontal, les côtés de cet hexagone doivent être en trait plein.

Nous nous bornerons pour le moment à ces indications sur la distinction des parties vues et des parties cachées, en nous réservant d'y revenir avec plus de détails dans la suite.

15. Cherchons, comme nouvel exemple, à représenter une pyramide, et, pour éviter toute difficulté, supposons qu'on donne : 1° la base qui est un quadrilatère *abcd* situé sur la feuille de dessin ; 2° la projection horizontale *s* du sommet ; 3° la hauteur de la pyramide (Pl. II, fig. 11).

Pour achever la projection horizontale, il suffira de joindre le point *s* aux points *a*, *b*, *c*, *d* par les droites *sa*, *sb*, *sc*, *sd* qui seront les projections horizontales des arêtes latérales. Toutes ces arêtes aussi bien que le contour *abcd* de la base sont vus par un observateur situé très-haut au-dessus du plan horizontal ; c'est pourquoi toute la projection horizontale est en traits pleins.

Passons à la projection verticale. Les sommets de la base ont tous une cote nulle ; leurs projections verticales sont donc les pieds a', b', c', d' des perpendiculaires abaissées de *a*, *b*, *c*, *d* sur la ligne de terre. Quant à la projection verticale du sommet de la pyramide, on l'obtient en menant la ligne de rappel du point *s* et prenant $\sigma s'$ égale à la cote, c'est-à-dire à la hauteur donnée de la pyramide. Il ne reste plus alors qu'à mener les droites $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$, $s'd'$ qui seront les projections verticales des arêtes latérales. Toutes ces arêtes seraient vues par un observateur situé à une très-grande distance en avant du plan vertical, sauf l'arête qui aboutit en *d* ; voilà pourquoi nous avons dessiné en traits pleins les droites $s'a'$, $s'b'$, $s'c'$, et en points ronds la droite $s'd'$.

Ces exemples étant bien compris, revenons à la théorie de la représentation du point.

Positions principales d'un point par rapport aux plans de projection.

16. Jusqu'ici nous avons supposé implicitement que le point à représenter était placé au-dessus du plan horizontal et en avant de la ligne de terre ou du plan vertical. On pourrait sans doute satisfaire toujours à ces conditions et s'astreindre, lorsqu'on veut dessiner un objet, à prendre pour plan horizontal un plan situé au-dessous de cet objet, et pour plan vertical un plan placé en arrière. Mais cela serait souvent très-incommode, et il convient de se débarrasser de cette restriction, en complétant le mode de représentation à l'aide de quelques conventions faites une fois pour toutes et propres à indiquer de quel côté le point considéré se trouve par rapport à chacun des plans de projection.

Voici comment on y parvient (Pl. II, fig. 12) :

Les plans de projection HH_1, VV_1, indéfiniment prolongés, forment en se coupant quatre angles dièdres.

On appelle *premier angle* le dièdre VH dans lequel on suppose le spectateur ; les deux faces H et V de ce dièdre reçoivent les noms de *partie antérieure du plan horizontal* et de *partie supérieure du plan vertical ;* par suite on donne à H_1 le nom de *partie postérieure du plan horizontal* et à V_1 celui de *partie inférieure du plan vertical.*

On appelle *second angle* le dièdre VH_1 formé par la partie supérieure V du plan vertical et par la partie postérieure H du plan horizontal ; — *troisième angle*, le dièdre H_1V_1, formé par la partie postérieure H_1 du plan horizontal et par la partie inférieure V_1 du plan vertical ; — *quatrième angle*, le dièdre V_1H formé par la partie inférieure du plan vertical et par la partie antérieure du plan horizontal.

On dispose les lettres L et T de façon que le spectateur placé dans le premier angle, ayant ses pieds appuyés sur le plan horizontal et regardant la ligne de terre, voie L à sa gauche et T à sa droite.

Enfin on suppose que la partie supérieure V du plan vertical se rabatte au delà du spectateur ainsi placé ; de sorte que, par l'effet de cette rotation, la partie supérieure V du plan vertical vienne recouvrir la partie postérieure H_1 du plan horizontal, tandis que la partie inférieure V_1 du plan vertical vient s'appliquer sous la partie antérieure H du plan horizontal.

Grâce à ces conventions, la lecture d'une épure n'offrira aucune ambiguïté. On placera la feuille devant soi de telle sorte qu'on ait L à sa gauche et T à sa droite ; dans cette position, on aura : 1° *en avant* (ou *au-dessous*) *de la ligne de terre*, la partie antérieure du plan horizontal recouvrant la partie inférieure du plan vertical ; 2° *en arrière* (ou *au-dessus*) *de la ligne de terre*, la partie supérieure du plan vertical recouvrant la partie postérieure du plan horizontal.

17. Cela posé, la manière de reconnaître d'après l'épure la position d'un point par rapport aux deux plans de projection résulte des trois règles suivantes qui sont évidentes et qu'il faut savoir appliquer sans hésitation :

1° *Un point est en avant ou en arrière du plan vertical suivant que sa projection horizontale est en avant ou en arrière de la ligne de terre.* Ainsi, les points A et D sont en avant du plan vertical, et l'on voit que leurs projections horizontales a et d sont en avant de LT ; les points B et C sont au contraire derrière le plan vertical, et l'on voit que leurs projections horizontales sont derrière LT.

2° *Un point est au-dessus ou au-dessous du plan horizontal, suivant que sa projection verticale est au-dessus ou au-dessous de la ligne de terre.* Ainsi, les points A et B sont au-dessus du plan horizontal, et l'on voit que leurs projections verticales a' et b' sont sur la partie supérieure V du plan vertical qui, après le rabattement, vient au-dessus de LT. Les points C et D sont, au contraire, au-dessous du plan horizontal, et l'on voit que leurs projections verticales c' et d' sont sur la partie inférieure V_1 du plan vertical qui, après le rabattement, vient au-dessous de LT.

3° *Un point est situé dans l'un des plans de projection, si sa projection sur l'autre plan est sur la ligne de terre.* En effet, pour qu'un point soit dans le plan horizontal, il faut que sa cote soit nulle, et par suite (n° 12), que sa projection verticale soit sur LT. De même, pour qu'un point soit dans le plan vertical, il faut que son éloignement soit nul et par suite (n° 12) que sa projection horizontale soit sur LT. On le voit d'ailleurs immédiatement sur la figure 13 : E et G sont dans le plan horizontal ; ils sont eux-mêmes leurs projections horizontales, et leurs projections verticales e' et g' sont sur LT ; de même F et K sont dans le plan vertical ; ils sont eux-mêmes leurs projections verticales, et leurs projections horizontales f et k sont sur LT.

18. Appliquons ces principes à la lecture de l'épure 14 de la planche II. Sur cette épure sont figurées les treize positions principales qu'un point peut occuper par rapport aux deux plans *coordonnés* (on nomme souvent ainsi les deux plans de projection).

Le point (a, a') *est dans le premier angle*, car il est en avant du plan vertical, puisque a est en avant de LT, et il est au-dessus du plan horizontal, puisque a' est au-dessus de LT. Ce point est plus voisin du plan vertical que du plan horizontal, puisque son éloignement αa est moindre que sa cote $\alpha a'$. — *Le point* (m, m') est aussi dans le premier angle, mais comme on a $\mu m = \mu m'$, il est équidistant des deux plans de projection, c'est-à-dire *situé dans le plan bissecteur du premier angle.*

Le point (b, b') *est dans le second angle*, car il est en arrière du plan vertical, puisque b est derrière LT, et il est au-dessus du plan horizontal, puisque b' est au-dessus de LT. Ce point est plus voisin du plan vertical que du plan horizontal, puisque $b\beta$ est moindre que $b'\beta$; tandis que *le point* (n, n'), qui est aussi dans le second angle, est équidistant des deux plans coordonnés, c'est-à-dire *est situé dans le plan bissecteur du second angle.*

En raisonnant d'une manière analogue, le lecteur se rendra compte sans peine des résultats suivants que nous ne ferons qu'énoncer :

Le point (c,c') *est dans le troisième angle;* il est plus voisin du plan horizontal que du plan vertical. — *Le point* (q,q') *est dans le plan bissecteur du troisième angle.*

Le point (d,d') *est dans le quatrième angle;* il est plus voisin du plan horizontal que du plan vertical. — *Le point* (p,p') *est dans le plan bissecteur du quatrième angle.*

Les points (e,e') *et* (g,g') *appartiennent au plan horizontal, le premier à la partie antérieure, le second à la partie postérieure.*

Les points (f, f') et (k, k') *appartiennent au plan vertical, le premier à la partie supérieure, le second à la partie inférieure.*

Le point (l, l') *appartient à la ligne de terre.*

Les commençants devront répéter cette discussion, jusqu'à ce qu'ils puissent indiquer immédiatement et sans aucune hésitation la position d'un point dans l'espace d'après la situation de ses projections par rapport à la ligne de terre.

Application à la représentation d'un cube.

19. Pour achever de familiariser le lecteur avec les règles précédentes, nous avons représenté (fig. 16, Pl. III) un cube adossé aux deux plans de projection.

Ce cube peut être situé dans l'un des quatre angles, comme le montre la figure 15 de la planche III. Dans tous les cas, ses projections se réduisent aux deux carrés suivant lesquels il s'appuie sur les deux plans de projection, et même ces deux carrés se superposent dans l'épure lorsque le cube est dans le second ou dans le quatrième angle. Ainsi :

Le cube ABCDEFGI (fig. 15), qui est dans le premier angle, est représenté (fig. 16) par les deux carrés marqués (1).

Le cube MKCDNOGI (fig. 15), qui est dans le second angle, est représenté (fig. 16) par le carré unique marqué (2).

Le cube PRSQNIGO (fig. 15), qui est dans le troisième angle, est représenté (fig. 16) par les deux carrés marqués (3).

Enfin le cube URSXEIGF (fig. 15), qui est dans le quatrième angle, est représenté (fig. 16) par le carré unique marqué (4).

On convient de regarder les plans de projection comme étant opaques, de sorte que tout ce qui n'est pas dans le premier angle est caché. Voilà pourquoi nous avons tracé en points ronds les carrés (2), (3) et (4).

Cas où le plan vertical est le plan de la feuille de dessin.

20. Nous avons donné le nom de *plan horizontal* au plan de la feuille de dessin, parce qu'en général le plan sur lequel on dessine est *horizontal*, dans le sens que la physique attribue à ce mot; c'est le plus souvent une table, tantôt c'est le sol qu'on a recouvert d'une couche de plâtre bien unie, d'autres fois c'est un parquet ciré comme dans les chantiers de construction des navires. En se représentant la feuille de dessin et le plan vertical qui lui est perpendiculaire, comme le sol et un mur, le mot *ligne de terre* s'explique de lui-même; c'est la ligne suivant laquelle le mur repose sur le sol.

Mais il arrive aussi qu'on dessine sur un plan vertical; les maçons, par exemple, prennent rarement la peine de dresser une aire en plâtre sur le sol; ils préfèrent dessiner sur un mur. Ajoutons qu'au point de vue purement abstrait, il y a parfois avantage à considérer le plan vertical comme étant la feuille de dessin. Il faut alors concevoir le plan vertical comme restant fixe et le plan horizontal comme se rabattant sur lui en tournant autour de l'intersection commune qui garde toujours le nom de *ligne de terre*. Mais pour qu'il n'y ait pas contradiction entre cette nouvelle manière de concevoir les choses et la manière précédente, il faut que le rabattement du plan horizontal s'effectue de telle sorte que la partie antérieure du plan horizontal vienne recouvrir la partie inférieure du plan vertical; de cette manière, il arrive toujours, comme précédemment, que l'on aura d'un côté de LT la partie supérieure du plan vertical et la partie postérieure du plan horizontal, et de l'autre côté de LT la partie inférieure du plan vertical et la partie antérieure du plan horizontal. Seulement (et il faut bien noter cette différence) dans le premier système, un observateur regardant la ligne de terre, ayant les pieds sur le plan horizontal, et voyant le plan vertical s'incliner au delà de lui, avait L à sa *gauche* et T à sa *droite;* tandis qu'ici, un observateur regardant la ligne de terre, ayant les pieds sur le plan vertical, et voyant le plan horizontal s'incliner au delà de lui, a L à sa *droite* et T à sa *gauche*. Le mouvement est représenté (fig. 17, Pl. III); M est le point de l'espace, m' sa projection verticale, m_1 sa projection horizontale avant le rabattement du plan horizontal, m cette projection après le rabattement. Pour lire l'épure, il faut concevoir le plan vertical fixe, imaginer que le plan horizontal se relève en tournant en sens inverse des flèches; la projection verticale m' ne bouge pas, la projection horizontale m vient en m_1, et le point M est à la rencontre des perpendiculaires élevées respectivement par m' et m_1 sur les deux plans V et H.

21. En résumé, l'épure d'un point (m,m') étant donnée (fig. 4, Pl. I), il y a quatre manières de se rendre compte de la position du point M de l'espace :

1° En supposant que le plan horizontal soit la feuille de dessin, on peut considérer le point comme défini par sa projection horizontale m et sa cote $\mu m'$; alors il suffit d'imaginer par m une perpendiculaire au plan horizontal et égale à $\mu m'$; l'extrémité de cette perpendiculaire est la position du point M.

2° En supposant encore que le plan horizontal soit la feuille de dessin, on peut considérer le point comme défini par sa projection horizontale m et par sa projection verticale rabattue m'; alors, il faut imaginer que le plan vertical soit redressé, et qu'on lui ait mené une perpendiculaire par la position qu'a prise m' après ce redressement; l'intersection de cette perpendiculaire et de la perpendiculaire élevée par m sur le plan horizontal sera le point demandé M.

3° En supposant que le plan vertical soit la feuille de dessin, on peut considérer le point comme défini par sa projection verticale m' et son éloignement μm; alors il suffit d'imaginer par m' une perpendiculaire au plan vertical égale à μm; l'extrémité de cette perpendiculaire est la position M du point demandé.

4° Enfin, en supposant toujours que le plan vertical soit la feuille de dessin, on peut considérer le point comme défini par sa projection verticale m' et par sa projection horizontale rabattue m; alors, il faut imaginer que le plan horizontal soit redressé, et qu'on lui ait mené une perpendiculaire par la position qu'a prise m après ce redressement; l'intersection de cette perpendiculaire et de la perpendiculaire élevée par m' sur le plan vertical sera le point demandé M.

Toutes ces manières de voir sont équivalentes; il importe qu'elles soient également familières au lecteur; dans chaque cas, on choisit celle qui convient le mieux.

Nous nous sommes beaucoup étendus sur l'épure du point, mais c'est la clef de la géométrie descriptive; d'ailleurs nous écrivons pour des commençants : or, chacun sait qu'en géométrie descriptive, plus qu'en toute autre étude, les progrès dépendent de l'attention qu'on donne aux premiers principes.

Il nous reste, pour en finir avec la représentation du point, à parler des projections auxiliaires.

Projections auxiliaires.

22. Dans une épure un peu compliquée, toutes les parties de la figure qu'on représente ne sont pas également bien disposées par rapport aux plans coordonnés. Aussi est-il rare qu'on n'emploie pour plans de projection que la feuille de dessin et un plan perpendiculaire; le plus souvent on fait intervenir une série de plans de projection perpendiculaires à la feuille de dessin, et l'on projette sur chacun de ces plans auxiliaires telle partie de l'objet qu'on veut mettre en évidence.

Ainsi, s'agit-il de représenter une maison, outre le *plan*, c'est-à-dire la projection horizontale, on emploie des *élévations latérales ou longitudinales*, c'est-à-dire diverses projections verticales sur des plans parallèles aux faces principales de l'édifice.

On voit donc s'introduire ici la question suivante :

Étant données les projections d'un point sur la feuille de dessin et sur un plan perpendiculaire, trouver la projection du même point sur un nouveau plan qui est perpendiculaire à la feuille de dessin et qu'on rabat sur elle.

1° Soient (fig. 18, Pl. III) m la projection horizontale et m' la projection verticale du point considéré M, et LT la ligne de terre. On demande la projection du même point sur un nouveau plan vertical dont la trace sur le plan horizontal est la droite $\alpha\beta$. Pour que les données soient complètes, il faut encore qu'on indique dans quel sens on veut rabattre le nouveau plan vertical sur la feuille de dessin, qui est ici le plan horizontal. Voici comment on indique ce sens : on met sur la nouvelle ligne de terre $\alpha\beta$ les lettres L_1T_1 de telle manière qu'un observateur qui regarde L_1T_1, qui a les pieds sur le plan horizontal et qui a L_1 à sa gauche et T^1 à sa droite voie la partie supérieure du nouveau plan vertical se rabattre au delà de lui. Ainsi la disposition L_1 et T_1 dans la figure 18 indique que la partie supérieure du nouveau plan vertical se rabat sur la région marquée (B), et que la partie inférieure vient s'appliquer sous la région marquée (A). Une fois qu'on a fixé ces conventions, qui sont d'ailleurs d'accord avec celles déjà faites antérieurement, le problème proposé n'offre aucune difficulté.

En effet, puisque le plan horizontal est resté invariable, la projection horizontale m du point M n'a pas changé, et la grandeur et le sens de sa cote sont aussi restés les mêmes. Or, comme m' est *au-dessus* de LT, M est au-dessus du plan horizontal ; sa nouvelle projection m'_1 devra donc être *au-dessus* de L_1T_1, et, pour l'obtenir, il suffira de mener la ligne de rappel $m\mu_1$ perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre L_1T_1 et de la prolonger d'une quantité $\mu_1 m'_1$ égale à $\mu m'$.

Nous avons fait l'épure pour d'autres points (p,p'), (o,o'), (r,r') en laissant au lecteur le soin de répéter le raisonnement.

2° Considérons en second lieu le cas (fig. 19, Pl. III) où l'on demande de trouver la projection d'un point donné (m,m') sur un nouveau plan perpendiculaire au plan vertical.

Il convient ici de considérer le plan vertical comme le plan de la feuille de dessin. Soit $\alpha\beta$ la trace sur le plan vertical du plan auxiliaire qui lui est perpendiculaire et que nous supposerons rabattu sur lui de manière que la partie antérieure s'applique sur la région (B'); nous indiquerons ce fait en plaçant L' en β et T' en α; alors un observateur regardant L'T', ayant ses pieds sur le plan vertical et ayant L' à droite et T' à gauche verra le nouveau plan s'abattre au delà de lui, ce qui est conforme à nos conventions antérieures (n° 20); la région (B') sera le dessous de la nouvelle ligne de terre L'T' et la région (A') le dessus. Pour avoir la nouvelle projection du point M, on observera que, par suite de l'immobilité du plan vertical, la projection verticale m' n'a pas changé et l'éloignement a conservé sa grandeur et son sens. Or, comme m est *au-dessous* de LT, le point M est en avant du plan vertical; sa nouvelle projection m_1 doit donc être *au-dessous* de L'T', et, pour l'obtenir, il suffit de mener la ligne de rappel $m'\mu_1$ perpendiculaire à la nouvelle ligne de terre L'T' et de la prolonger d'une quantité $\mu_1 m_1$ égale à μm.

En somme, dans ces recherches de projection auxiliaire, il suffit de bien connaître les conventions faites sur le sens du rabattement, et d'observer que *la projection sur le plan de la feuille de dessin ne change pas* et que *la distance du point à ce plan conserve sa grandeur et son sens.*

23. L'épure 10 de la planche II offre une application du principe précédent.

On y voit un prisme droit hexagonal dont nous avons déjà obtenu au n° 14 la projection horizontale *abcdef* et la projection verticale $a'm'q'd'$, la ligne de terre étant LT. Cette ligne de terre est placée d'une manière quelconque par rapport à la base *abcdef;* mais l'on conçoit que, si l'on eût pris une ligne de terre parallèle à l'un des côtés de l'hexagone, c'est-à-dire un plan vertical de projection parallèle à l'une des faces latérales du prisme, la projection verticale eût été un peu plus simple.

Prenons donc une ligne de terre L_1T_1 parallèle aux côtés opposés *ab* et *ed*, et cherchons d'après les règles données au numéro précédent la nouvelle projection verticale du prisme. Puisque la droite *ae* est à angle droit sur *ab* et par suite sur sa parallèle L_1T_1 les lignes de rappel des points *a* et *e* ne seront plus distinctes, et par suite les arêtes qui ont leurs pieds en *a* et *e* auront la même projection verticale $e'_1m'_1$, et cette ligne devra être dessinée par un trait plein, puisqu'elle est à la fois la projection d'une arête vue et d'une arête cachée. Pour la même raison, les deux arêtes qui ont leurs pieds en *b* et *d* ont la même projection verticale $b'_1n'_1$ qui est dessinée par un trait plein. Enfin le rectangle $e'_1m'_1n'_1b'_1$ qui est la projection commune des deux faces latérales opposées dont *ab* et *ed* sont les bases représente la vraie grandeur de ces deux faces, puisque ces faces sont parallèles au nouveau plan vertical de projection (n° 4).

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Un cube a $0^m,85$ de côté; il repose sur le plan horizontal; on demande de le représenter en prenant pour plan vertical de projection un plan parallèle à l'une des diagonales de la base. On construira la figure à l'échelle de $\frac{1}{20}$.

2. On donne un point situé dans le second angle des deux plans coordonnés; trouver la nouvelle projection de ce point sur un plan perpendiculaire au plan vertical.

Même question, en supposant successivement le point situé dans le troisième et dans le quatrième angle des plans de projection primitifs.

3. Représenter, à l'échelle de $\frac{1}{20}$, un tronc de prisme dont la section droite est un triangle *a'b'c'* situé dans le plan vertical de projection; les côtés *a'b'*, *b'c'*, *c'a'* de ce triangle sont égaux respectivement à $0^m,61$, $0^m,82$, 1^m : le côté *c'a'*

est perpendiculaire à la ligne de terre; les arêtes latérales correspondantes aux sommets a', b', c', sont respectivement égales à $0^m,81$, $1^m,2$, $1^m,4$; elles sont situées dans le premier angle.

Faire ensuite une projection auxiliaire de ce tronc sur un nouveau plan vertical. On tiendra compte dans la mise à l'encre des parties vues et des parties cachées.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DE LA LIGNE DROITE.

Définitions et notions préliminaires.

24. Nous avons déjà vu, au n° 3, que la *projection d'une droite sur un plan est une droite ou un point*, suivant que la droite est oblique ou perpendiculaire à ce plan.

On appelle *projection horizontale d'une droite* sa projection sur le plan horizontal, et *projection verticale* sa projection sur le plan vertical.

On nomme *trace horizontale* d'une droite le point où elle perce le plan horizontal, et *trace verticale* le point où elle coupe le plan vertical.

On appelle *horizontale* toute droite parallèle au plan horizontal, *droite de front* toute droite parallèle au plan vertical, *verticale* toute droite perpendiculaire au plan horizontal.

Une droite horizontale n'a pas de trace horizontale ; elle a une trace verticale à moins qu'elle ne soit parallèle à la ligne de terre. De même une droite de front n'a pas de trace verticale ; elle a une trace horizontale à moins qu'elle ne soit parallèle à la ligne de terre.

25. On sait qu'on entend par *angle de deux droites situées d'une manière quelconque dans l'espace* l'angle formé en menant par un point quelconque des droites parallèles aux droites considérées et de même sens. On dit que deux *droites* sont *perpendiculaires l'une à l'autre* (qu'elles soient ou non dans un même plan), lorsque leur angle ainsi défini est droit.

On sait en outre que, *pour qu'une droite soit perpendiculaire à un plan, il faut et il suffit qu'elle soit perpendiculaire à deux droites non parallèles entre elles, situées dans le plan considéré ou parallèles à ce plan.* (Voir pour le développement de ces notions les *Éléments de Géométrie* par MM. Rouché et de Comberousse.)

Cela posé, voici un théorème fondamental :

Lorsque deux droites AB *et* CD *de l'espace sont perpendiculaires l'une à l'autre, leurs projections* ab *et* cd *sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD, *sont aussi perpendiculaires l'une à l'autre* (Pl. III, fig. 20).

En effet, la droite *cd* est, comme sa parallèle CD, à angle droit sur AB ; elle est d'ailleurs à angle droit sur la projetante A*a*, puisque cette projetante est perpendiculaire au plan P qui contient *cd ;* donc *cd* est perpendiculaire au plan AB*ab* et par suite à *ab*.

Réciproquement, *deux droites de l'espace* AB *et* CD *sont perpendiculaires l'une à l'autre, si leurs projections* ab *et* cd *sur un plan* P *parallèle à l'une d'elles* CD, *sont perpendiculaires entre elles.*

En effet, la droite *cd*, étant à angle droit sur *ab* et sur A*a*, est perpendiculaire au plan AB*ba ;* il en est donc de même de sa parallèle CD, qui par suite est perpendiculaire à AB.

26. On appelle *angle d'une droite et d'un plan* l'angle de cette droite avec sa projection sur ce plan. Ainsi l'angle d'une droite avec le plan horizontal est l'angle de cette droite et de sa projection horizontale ; l'angle d'une droite avec le plan vertical est l'angle de cette droite et de sa projection verticale.

Représentation d'une droite par ses projections sur deux plans rectangulaires.

27. En géométrie descriptive, on représente habituellement une droite par sa projection horizontale et par sa projection verticale. Ainsi, soient (Pl. III, fig. 21) AB une droite quelconque, H et V les deux plans de projection, ab la projection horizontale de AB, et $a'b'$ sa projection verticale; sur l'épure (fig. 22), la droite AB sera représentée par la projection horizontale ab, et par la position $a'b'$ que prend la projection verticale après le rabattement du plan vertical. Pour concevoir la position de la droite AB dans l'espace d'après l'épure 22, on supposera le plan vertical redressé, puis on imaginera un plan mené par $a'b'$ perpendiculairement à ce plan vertical, et un plan mené par ab perpendiculairement au plan horizontal; la droite AB, devant appartenir à l'un et à l'autre de ces deux plans, sera leur intersection.

28. Ce raisonnement prouve qu'une droite est déterminée par sa projection horizontale et par sa projection verticale, à moins que ses deux plans projetants ne se confondent en un seul, qui, devant être alors perpendiculaire à la fois au plan horizontal et au plan vertical, serait perpendiculaire à la ligne de terre. On voit, en effet, *à priori*, qu'une droite, telle que CD (Pl. III, fig. 21), située dans un plan VTH perpendiculaire à la ligne de terre, n'est pas déterminée par ses projections, tant qu'elle est oblique aux deux plans coordonnés; elle peut prendre telle position qu'on voudra dans le plan VTH, pourvu qu'elle soit oblique sur TV et TH, elle aura toujours pour projection horizontale TH, et pour projection verticale TV, et sur l'épure (fig. 22), ses deux projections seront confondues en une même droite $cd\ c'd'$ perpendiculaire à la ligne de terre.

En résumé, *une droite est déterminée par sa projection horizontale et par sa projection verticale, à moins que cette droite ne soit perpendiculaire à la ligne de terre et oblique aux deux plans de projection.*

Conditions pour qu'une droite passe par un point, rencontre une droite, rencontre un plan.

29. *Pour qu'une droite* AB *passe par un point* M, *il faut que sa projection horizontale* ab *passe par la projection horizontale* m *du point, et que sa projection verticale* a'b' *passe par la projection verticale* m' *du point* (fig. 21 et 22).

Ces conditions sont nécessaires, puisque la projection d'une droite sur un plan est le lieu des projections des divers points de cette droite. (Nous en avons déjà fait usage plusieurs fois.)

Ces conditions sont suffisantes, si la droite AB *est* DÉTERMINÉE *par ses deux projections* ab *et* a'b'.

En effet, les projetantes, qui déterminent par leur rencontre le point M, sont respectivement contenues dans les deux plans projetants de la droite ; le point M appartient donc à la fois à ces deux plans, et, par suite, à leur intersection AB, si ces deux plans ne se confondent pas.

30. De là résulte la proposition suivante :

Pour que deux droites AB *et* CD *se coupent*, c'est-à-dire pour qu'elles passent par un même point, *il faut que leurs projections horizontales* ab *et* cd *aient un point commun* o, *que leurs projections verticales* a'b' *et* c'd' *aient un point commun* o' *et que les deux points* o *et* o' *soient sur une même perpendiculaire à la ligne de terre* (Pl. III, fig. 23).

Ces conditions sont suffisantes, si les droites AB *et* CD *sont* DÉTERMINÉES *par leurs projections.*

31. *Pour qu'une droite* AB *rencontre un plan* P, *il faut et il suffit que, sur un plan perpendiculaire au plan* P, *la projection de la droite* AB *rencontre la trace du plan* P.

La condition est nécessaire ; car le point commun à la droite AB et au plan P doit se projeter à la fois sur la projection de la droite AB (n° 29), et sur la trace du plan P (n° 3).

Elle est suffisante; car la perpendiculaire au plan de projection, élevée par le point commun à la projection de la droite AB et à la trace du plan P, rencontre AB, et est située tout entière dans le plan P. Son point de rencontre avec AB est alors commun à AB et au plan P.

Positions principales d'une droite par rapport aux deux plans de projection.

32. Une droite de l'espace peut avoir, par rapport aux deux plans coordonnés, des positions très-diverses, que le dessin de ses projections permet de reconnaître aisément.

La droite considérée peut être parallèle à la ligne de terre, perpendiculaire ou oblique à cette ligne.

1° *Si une droite est parallèle à la ligne de terre, ses deux projections sont parallèles à cette ligne ;* car les deux projections de la ligne de terre coïncident avec cette ligne, et l'on sait (n° 5) que deux droites parallèles ont leurs projections sur un même plan parallèle. — Ainsi la droite (ab, $a'b'$) (Pl. IV, fig. 29) est une parallèle à la ligne de terre.

2° Le cas d'une droite perpendiculaire à la ligne de terre a déjà été examiné au n° 28.

Si une droite est perpendiculaire à la ligne de terre et oblique par rapport aux deux plans de projection, ses deux projections sont confondues en une droite unique, perpendiculaire à la ligne de terre (Pl. III, fig. 22).

Si une droite est perpendiculaire à l'un des plans de projection, sa projection sur ce plan est un point, et sa projection sur l'autre plan est une perpendiculaire à la ligne de terre passant par ce point; ainsi (Pl. IV, fig. 30

la droite $(p, p'q')$ est une verticale, et la droite (rs, r') est une perpendiculaire au plan vertical.

3° Quand une droite est oblique à la ligne de terre, elle peut être parallèle à l'un des plans de projection (*horizontale* ou *de front*), ou elle peut rencontrer à la fois ces deux plans.

Toute horizontale a sa projection verticale parallèle à la ligne de terre, puisque tous ses points ayant même cote ont leurs projections verticales à la même distance de LT ; *sa projection horizontale* rencontre la ligne de terre (n° 31), puisque nous supposons que cette horizontale n'est pas parallèle à la ligne de terre, et, par suite, qu'elle rencontre le plan vertical; cette projection horizontale *est* d'ailleurs *parallèle à la droite elle-même de l'espace* (n° 4). Sur l'épure 30, la droite $(av, a'v')$ est une horizontale.

On voit de même que *toute droite de front a pour projection horizontale une parallèle à la ligne de terre, et pour projection verticale une droite qui rencontre la ligne de terre, et qui est parallèle à la droite de front elle-même*. Sur l'épure 30, la droite $(ah, a'h')$ est de front.

Enfin, *si une droite est oblique à la ligne de terre, et rencontre à la fois les deux plans de projection, ses projections rencontrent la ligne de terre, et la coupent l'une et l'autre obliquement;* car si l'une des projections coupait LT à angle droit, la droite considérée serait (n° 25, réciproque) perpendiculaire à la ligne de terre. La droite $(pq, p'q')$ de l'épure 24 (Pl. IV) est oblique à la ligne de terre, et rencontre les deux plans de projection.

33. Il résulte de la discussion précédente, qu'une ligne droite ne saurait avoir pour projections :

1° Deux droites perpendiculaires à la ligne de terre en des points différents ;

2° Deux droites dont une seule est perpendiculaire à la ligne de terre ;

3° Une perpendiculaire à la ligne de terre et un point non situé sur cette perpendiculaire ;

4° Une droite non perpendiculaire à la ligne de terre et un point.

Connaissant deux points d'une droite, trouver deux projections qui la déterminent, et inversement.

34. Une droite n'est pas toujours donnée par deux projections ; elle l'est souvent par deux points. Il importe donc de savoir passer d'un système de données à l'autre.

Soient (a, a') (b, b') (Pl. IV, fig. 24) deux points donnés ; d'après le numéro 29, on aura les projections de la droite AB, qui joint ces deux points en menant les droites ab et $a'b'$; et, si ces deux projections ab et $a'b'$ ne sont pas confondues en une même droite perpendiculaire à LT, elles déterminent la droite AB (n° 28).

Si les deux projections ab et $a'b'$ sont confondues en une même droite perpendiculaire à LT (fig. 25), elles ne détermineront plus la droite AB (n° 28), et il faudra recourir à une projection auxiliaire. A cet effet, on prendra, par exemple, un nouveau plan de projection vertical, dont la trace L_2T_2 sur le plan horizontal ne soit pas perpendiculaire à ab; on y projettera les points A et B en a'_2 et b'_2, en portant sur les lignes de rappel $a\alpha_2$, $\beta\beta_2$ les cotes $\alpha_2 a_2' = va'$, $\beta_2 b_2' = vb'$, et les deux projections ab et $a'_2 b'_2$ détermineront la droite. — Souvent, dans le cas qui nous occupe, on prend pour nouveau plan vertical le plan perpendiculaire à LT, qui contient la droite AB ; alors c'est la droite $abb'a'$ qui est la nouvelle ligne de terre L_1T_1 ; on élève les perpendiculaires aa'_1, bb'_1 respectivement égales aux cotes va', vb', et la droite est déterminée par les projections ab et $a'_1 b'_1$.

Inversement, si l'on donne deux projections pq, $p'q'$ qui déterminent une droite (fig. 24), rien de plus simple que d'avoir autant de points qu'on voudra de cette droite. Si l'on mène une ligne de rappel quelconque *aαa'*, les points *a* et *a'*, où cette ligne de rappel rencontre *pq* et *p'q'*, seront les projections d'un point de la droite (*pq*, *p'q'*) (n° 29). Une seconde ligne de rappel *bβb'* donnerait un second point (*b*, *b'*).

Puisqu'on passe si aisément d'un mode de détermination à l'autre, nous pourrons, dans tout problème où figurera une droite donnée, la supposer définie par celui de ces deux systèmes (deux points, ou deux projections déterminantes) qui nous conviendra le mieux.

De même, nous considérerons une droite inconnue comme trouvée dès que nous en aurons soit deux points, soit deux projections déterminantes.

Vérifier si deux droites se coupent, et chercher le point d'intersection.

35. De quelque manière que les droites soient données, on prendra un plan vertical de projection, tel que chaque droite soit déterminée par sa projection horizontale et sa projection verticale (le plus souvent cette opération préliminaire sera faite). Dès lors soient *ab* et *a'b'* (Pl. III, fig. 23) les projections qui déterminent la première droite, et *cd*, *c'd'* les projections qui déterminent la seconde. Pour que les deux droites se coupent, il faut, et il suffit (n° 30) que *ab* et *cd* aient un point commun *o*, que *a'b'* et *c'd'* aient un point commun *o'*, et que les points *o* et *o'* soient sur une même perpendiculaire à LT. Si cette condition est remplie, (*o*, *o'*) est le point d'intersection demandé.

Une difficulté peut se présenter : les projections de même nom peuvent se couper hors de la feuille de dessin; alors, pour constater si les points *o* et *o'* sont sur une même perpendiculaire à LT, on fait une *réduction d'échelle*, c'est-à-dire qu'on construit une figure semblable à la figure proposée à une échelle assez petite pour ramener dans l'intérieur de la feuille les points homologues de o et o'.

36. Quand les deux droites $(ab,\ a'b')$, $(cd,\ c'd')$ (fig. 26) sont situées dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre et données chacune par deux points, l'opération préliminaire signalée ci-dessus est indispensable. On prend alors ordinairement pour plan auxiliaire le plan même qui contient les deux droites. Après cette opération, les deux droites sont déterminées, l'une par les projections ab, $a'_1b'_1$, l'autre par les projections cd, $c'_1d'_1$; leur intersection est (o, o'_1), et la projection o' de ce point sur l'ancien plan vertical s'obtient en prenant $ko' = oo'_1$.

37. De même, quand une seule $(ab, a'b')$ des droites est dans un plan perpendiculaire à LT (fig. 27), on prend habituellement ce plan lui-même pour plan vertical auxiliaire ; seulement il y a ici une légère simplification : il n'est pas besoin de chercher la nouvelle projection verticale de $(cd,\ c'd')$. En effet, si les deux droites se coupent, l'intersection ne peut être que le point (o, o') ; il suffit donc de voir si $(o,\ o')$ est ou non sur la droite AB, c'est-à-dire si sa nouvelle projection verticale o'_1 est sur la nouvelle projection verticale $a'_1b'_1$ de AB ; c'est ce qui arrive dans l'épure 27.

Mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.

38. *Pour que deux droites soient parallèles, il faut que leurs projections horizontales soient parallèles entre elles et que leurs projections verticales soient parallèles entre elles.*

Ces conditions sont suffisantes, si les deux droites sont déterminées par leurs projections.

La première partie de l'énoncé résulte immédiatement du n° 5. Il reste à prouver la seconde partie.

Soient donc : AB une droite déterminée par ses projections ab et $a'b'$, CD une droite déterminée par ses projections cd et $c'd'$; si ab est parallèle à cd, et $a'b'$ à $c'd'$, AB et CD seront parallèles. En effet, prenons (Pl. IV, fig. 28) sur AB un point quelconque (a,a') et concevons par ce point A la parallèle AX à CD. La projection horizontale de AX devra passer par a (n° 29), et, en outre, d'après la première partie du théorème actuel, être parallèle à cd; cette projection sera donc ab. De même la projection verticale de AX sera $a'b'$. Donc, puisque par hypothèse il n'y a que la droite AB qui ait ab et $a'b'$ pour projections, il faut que AB et AX coïncident, c'est-à-dire que AB soit parallèle à CD.

39. De là découle le moyen de mener par un point donné une parallèle à une droite donnée.

Soient cd et $c'd'$ les projections qui déterminent la droite, et (a,a') le point donné rapporté aux mêmes plans de projection. On mènera par a une parallèle ab à cd et par a' une parallèle $a'b'$ à $c'd'$; la droite ayant ab et $a'b'$ pour projections sera déterminée et parallèle à $(cd,c'd')$.

Intersection d'une droite et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection.

40. Soit à trouver l'intersection d'une droite donnée et d'un plan vertical dont la trace sur le plan horizontal est EF (fig. 24). De quelque manière que la droite soit donnée, on commencera par tracer sa projection horizontale pq et sa projection verticale $p'q'$ sur un plan vertical de projection tel que la ligne de terre LT ne soit pas perpendiculaire à pq. La droite étant alors bien définie par les projections pq et $p'q'$, on aura la projection horizontale du point commun à cette droite et au plan vertical EF en prenant l'intersection a de pq et de EF (n° 31); la ligne de rappel

$a\alpha$ du point a donnera ensuite par son intersection avec $p'q'$ la projection verticale a' du point demandé.

De même, soit à trouver l'intersection d'une droite donnée et d'un plan perpendiculaire au plan vertical dont la trace sur ce plan vertical est KI. La droite étant bien définie par les projections pq, $p'q'$, on aura la projection verticale du point commun à cette droite et au plan KI, en prenant l'intersection b' de KI et de $p'q'$. La ligne de rappel $b\beta$ du point b' donnera ensuite par son intersection avec pq la seconde projection b du point demandé.

Recherche des traces d'une droite sur les plans de projection.

41. La recherche des traces d'une droite sur les plans de projection n'est qu'un cas particulier du problème précédent.

Supposons d'abord la droite déterminée (fig. 24) par ses projections pq et $p'q'$ sur les deux plans donnés. La trace verticale de la droite est le point où cette droite rencontre le plan vertical de projection ; on aura donc sa projection horizontale v en prenant l'intersection de pq et de LT (nº 40); puis la ligne de rappel vv' du point v donnera, par sa rencontre avec $p'q'$, la projection verticale v de cette trace, c'est-à-dire cette trace verticale elle-même. De même, en prenant l'intersection h' de $p'q'$ et de LT, on aura la projection verticale de la trace horizontale, et la projection horizontale de cette trace, c'est-à-dire cette trace elle-même sera à la rencontre h de pq et de la ligne de rappel du point h'.

En somme, la règle pratique est la suivante : *Pour trouver la trace horizontale, par le point où la projection verticale de la droite rencontre la ligne de terre menez à cette ligne une perpendiculaire jusqu'à la projection horizontale de la droite; pour trouver la trace verticale, par le point où* *la projection horizontale de la droite rencontre la ligne de terre, menez à cette ligne une perpendiculaire jusqu'à la projection verticale de la droite.*

Dans l'épure 31 (Pl. IV), on a appliqué cette règle à quatre droites qui percent chacune les deux plans de projection ; la partie comprise entre les deux traces est située, pour la droite (1) dans le premier angle, pour la droite (2) dans le second, pour la droite (3) dans le troisième, pour la droite (4) dans le quatrième.

Dans l'épure 30 (Pl. IV), on a appliqué la règle à deux horizontales (1) et (2) et à deux droites de front (3) et (4) ; pour les deux premières, la trace horizontale disparaît à l'infini ; pour les deux autres, c'est la trace verticale qui s'éloigne indéfiniment.

42. Si la droite donnée n'est pas déterminée par ses projections sur les deux plans considérés (fig. 25, Pl. IV), on conservera sa projection horizontale ab, et à l'aide des deux points (a,a'), (b,b') qui définissent cette droite, on déterminera sa projection $a'_2\, b'_2$ sur un plan vertical auxiliaire tel que la ligne de terre $L_2\, T_2$ ne soit pas perpendiculaire à ab. La droite étant alors bien définie par les projections ab et $a'_2b'_2$; on aura immédiatement sa trace horizontale h par la règle du numéro précédent. Quant à la trace verticale, c'est-à-dire la trace sur l'ancien plan vertical, sa recherche n'est autre que le problème du n° 40 ; il faut prendre l'intersection de la droite $(ab,\ a'_2\, b'_2)$ avec le plan vertical dont LT est la trace horizontale ; par le point v commun à ab et à LT, on mène la ligne de rappel $vu\ v'_2$ jusqu'à la rencontre avec $a'_2b'_2$; la trace demandée est le point v,v'_2 ; seulement il se trouve ainsi défini par rapport au plan horizontal et à un plan vertical de projection autre que le plan vertical donné ; pour trouver la projection v' sur l'ancien plan vertical, c'est-à-dire la trace verticale elle-même, il suffira de porter la cote uv'_2 en vv'.

Habituellement, on choisit, pour nouveau plan vertical de projection, le plan perpendiculaire à LT qui contient la droite donnée; la nouvelle ligne de terre est alors $L_1 T_1$, la nouvelle projection verticale de la droite est $a'_1 b'_1$, et la trace verticale demandée a pour projections dans ce système v et v'_1, d'où l'on déduit v' en portant la cote vv'_1 en vv'.

43. Le problème inverse, c'est-à-dire la *recherche des projections d'une droite dont on connaît les traces*, n'est qu'un cas particulier du problème traité au n° **34.**

Seulement, ici on donne les traces elles-mêmes et il faut commencer par chercher leurs projections.

Ainsi soient données la trace horizontale h d'une droite et sa trace verticale v' (fig. 24), on dira :

La trace horizontale h est elle-même sa projection horizontale, et sa projection verticale h' est sur la ligne de terre (n° **17**) au pied de la perpendiculaire abaissée de h sur cette ligne. La trace verticale v' est elle-même sa projection verticale, et sa projection horizontale v est sur la ligne de terre au pied de la perpendiculaire abaissée de v' sur cette ligne. Dès lors (n° **34**) hv et $h'v'$ seront les projections demandées.

Le problème cesse d'être déterminé, lorsque les deux traces coïncident avec un même point de la ligne de terre ; car alors on ne donne plus en réalité qu'un seul point de la droite.

Distinction des parties visibles et des parties invisibles d'une droite illimitée.

44. La connaissance des traces d'une droite permet de distinguer immédiatement sur cette droite les parties qui sont visibles de celles que cachent les plans de projection.

Observons d'abord que, pour qu'il y eût lieu de chercher à distinguer les arties vues et les parties cachées d'une droite, il faut que cette droite figure parmi les données ou parmi les résultats de la question que l'on traite. S'il s'agissait d'une ligne auxiliaire, c'est-à-dire d'une ligne de construction servant à déduire les résultats des données, la recherche n'aurait aucune raison d'être; de telles lignes sont toujours représentées par une suite de *traits interrompus* comme nous l'avons dit déjà pour les lignes de rappel.

Supposons donc que la droite illimitée que l'on considère soit une donnée ou un résultat. Alors ses parties visibles devront être en ligne pleine et ses parties invisibles en points ronds. On reconnaît ces diverses parties à l'aide de ce principe évident :

Pour qu'un point d'une droite soit un point de séparation d'une partie vue et d'une partie cachée, il faut et il suffit que le point soit une TRACE VISIBLE, c'est-à-dire un point appartenant à la partie supérieure du plan vertical ou à la partie antérieure du plan horizontal.

De là résultent les conséquences suivantes :

1° *Si une droite* n'a pas de traces, c'est-à-dire *est parallèle à la ligne de terre*, elle est entièrement vue ou entièrement cachée; on décidera la question en prenant un point à volonté sur cette droite et regardant s'il est ou non dans le premier angle. Ainsi dans la figure 29 de la Planche IV la droite (ab, $a'b'$) est vue, elle est dans le premier angle; la droite (cd, $c'd'$) est cachée, elle est dans le second angle.

2° *Si une droite* n'a qu'une trace, c'est-à-dire *est horizontale ou de front*, elle sera entièrement cachée si cette trace est invisible : telles sont les droites (2) et (4) de la figure 30. Elle sera vue d'un côté de cette trace et cachée de l'autre, si cette trace est visible : telles sont les droites (1) et (3) de la figure 30; la considération d'un point suffira pour décider de quel côté est la partie vue : ainsi sur la droite (1) le point (a,a') est dans le premier angle; donc c'est la par-e à droite de (v,v') qui est vue et la partie à gauche qui st cachée.

3° *Si la droite a deux traces* (fig. 31), il peut se présenter rois cas : ou les deux traces sont invisibles, comme dans 3), et alors la droite est entièrement cachée ; ou les deux races sont vues, comme dans (1), et alors la seule partie ue est la partie comprise entre ces deux traces ; ou enfin n'y a qu'une trace visible, et alors la droite a deux pares, l'une vue, l'autre cachée, qui sont séparées par cette race, et la partie cachée est celle sur laquelle la seconde race est située : telles sont les droites (2) et (4).

Ajoutons qu'il n'a été question ici que des parties cahées par les plans de projection ; telle partie que nous vons signalée comme vue pourrait devenir cachée si un orps solide était interposé entre elle et l'observateur.

ongueur d'une portion de droite ou distance de deux points. Angle d'une droite avec les plans de projection.

45. Soient (fig. 32) deux points A et B situés d'une maière quelconque dans l'espace ; il s'agit de trouver leur istance, c'est-à-dire la longueur de la portion de droite B, ainsi que les angles que cette droite forme avec les lans de projection.

Par l'un A des deux points, imaginons la parallèle AX à a projection horizontale *ab* de la droite AB. Dans le riangle rectangle ABX, l'hypoténuse AB est la longueur herchée, et l'angle BAX est précisément l'angle de la roite AB avec le plan horizontal, car la droite AB fait le nême angle θ avec *ab* et avec sa parallèle AX. Si donc on avait construire ce triangle, on aurait par là même la lonueur AB et l'angle θ ; or on connaît les deux côtés de angle droit de ce triangle rectangle : car le côté AX n'est utre que la longueur *ab* de la projection horizontale de la droite; et quant à BX, c'est la distance du point B à l'horizontale AX du point A. Sur l'épure (fig. 33), cette horizontale a pour projection verticale la parallèle $a'x'$ menée par a' à la ligne de terre, et par suite $b'x'$ est précisément la longueur BX. Si donc on élève en b sur ab une perpendiculaire bb_1 égale à $b'x'$, on aura, en menant ab_1 construit le triangle rectangle considéré; ab_1 sera la distance demandée, et l'angle b_1ab sera l'angle θ de la droite avec le plan horizontal.

46. On peut opérer par rapport au plan vertical comme nous venons de le faire par rapport au plan horizontal. Par l'un B des deux points (fig. 32), menons la parallèle BY à la projection verticale $a'b'$ de la droite AB. Dans le triangle rectangle ABY, l'hypoténuse sera encore la longueur cherchée, et l'angle ABY sera l'angle de la droite avec le plan vertical. Or on connaît les deux côtés de l'angle droit du triangle ABY; l'un BY est égal à la projection verticale $a'b'$ de la droite, l'autre AY est l'éloignement du point A par rapport à la ligne de front BY. Sur l'épure (fig. 33), cette ligne de front se projette horizontalement en by, et par suite ay est égal au côté AY. Si donc on élève en a' sur $a'b'$ la perpendiculaire $a'a'_1$ égale à ay, et si l'on mène a'_1b', on aura construit le triangle rectangle considéré; a'_1b' sera la distance demandée, et l'angle $a'b'a'_1$ sera l'angle ω de la droite avec le plan veatical.

Questions inverses des précédentes.

47. Les problèmes inverses des précédents se résolvent en exécutant les mêmes constructions dans un ordre différent.

Mais, pour bien se rendre compte de ces constructions inverses, il convient d'indiquer une autre manière d'expliquer les tracés qui précèdent. On peut considérer le triangle bab_1 de la figure 33 comme la projection horizontale du triangle ABX de la figure 32 qu'on a fait préalablement tourner autour du côté horizontal AX jusqu'à ce que son plan soit horizontal. De même le triangle $a'b'a'_1$ de la figure 33 peut être considéré comme la projection verticale du triangle YBA de la figure 32, en supposant qu'on ait préalablement fait tourner ce triangle autour du côté BY de manière à rendre son plan parallèle au plan vertical.

Cela posé, supposons qu'on demande *de trouver sur une droite donnée* $(ab, a'b')$ *un point dont la distance au point* (a, a') *ait une longueur et un sens donnés ;* à l'aide du point (a, a'), et d'un second point (b, b') pris à volonté sur la droite, on construira comme ci-dessus le triangle rectangle abb_1. Considérons ce triangle comme la projection du triangle ABX rendu horizontal par une rotation autour de AX ; prenons à partir du point a sur ab_1, dans le sens voulu, la distance donnée am_1, et abaissons $m_1 m$ perpendiculaire sur ab. Si l'on suppose que le triangle ABX se relève autour de AX pour reprendre sa position verticale, le point projeté actuellement en m_1 prendra la position du point cherché. Sa projection horizontale sera donc en m, et la ligne de rappel $m\mu$ donnera par son intersection avec $a'b'$ la projection verticale m'.

On pourrait opérer d'une manière analogue par rapport au plan vertical de projection. La construction est faite sur l'épure 33 ; nous laissons au lecteur le soin de l'expliquer et de constater les vérifications qui en résultent.

Supposons qu'on veuille *mener par un point donné* (a, a') *une droite ayant une projection horizontale donnée ab et faisant un angle donné* θ *avec le plan horizontal.* On mènera une droite ab_1 faisant avec ab l'angle voulu θ ; b_1 étant un point pris à volonté sur ab_1, on abaissera sur ab la perpendiculaire b_1b, et sur la ligne de rappel $b\beta$ on portera au-dessus (ou au-dessous, suivant le sens de l'angle) de l'horizontale $a'x'$ une longueur $x'b'$ égale à bb_1. En menant $a'b'$, on aura la projection verticale de la droite demandée.

Ces problèmes inverses ont, outre leur utilité propre, l'avantage de familiariser l'esprit avec la solution du problème direct, en montrant le tracé correspondant sous ses divers aspects.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Une droite étant donnée, trouver les points de cette droite qui sont situés dans les plans bissecteurs des dièdres formés par les deux plans de projection.

2. Quelle doit être la position d'une droite par rapport aux plans de projection :

1° Pour que sa projection horizontale et sa projection verticale se confondent en une droite unique oblique à la ligne de terre?

2° Pour que sa projection horizontale et sa projection verticale soient symétriques par rapport à la ligne de terre?

3° Pour que sa projection horizontale et sa projection verticale soient parallèles?

4° Pour que sa projection horizontale et sa projection verticale soient également inclinées sur la ligne de terre d'un même côté?

5° Pour que les deux traces de la droite se confondent sur l'épure?

3. Faire l'épure :

1° De 6 positions que peut avoir une horizontale oblique au plan vertical ;

2° Des 6 positions d'une droite de front oblique au plan horizontal ;

3° Des 6 positions d'une verticale ;

4° Des 6 positions d'une perpendiculaire au plan vertical ;

5° Des 9 positions d'une parallèle à la ligne de terre.

4. Connaissant l'une des projections d'un point et sa distance à un point donné, trouver l'autre projection de ce point.

CHAPITRE III

APPLICATIONS

Section d'une pyramide par un plan vertical.

48. La pyramide est donnée par son sommet (s, s') et par sa base *abcde* située dans le plan horizontal (fig. 34, Pl. V).

En joignant le point s aux points a, b, c, d, e, on aura les projections horizontales des arêtes latérales. D'après la disposition de la figure, il est clair qu'un spectateur situé à une distance infinie au-dessus du plan horizontal verrait les trois faces SAB, SBC, SCD, et n'apercevrait ni l'intérieur de la base ABCDE ni les faces SDE, SEA; donc, en projection horizontale, les lignes vues sont les arêtes SA, SB, SC, SD et les côtés AB, BC, CD, et les lignes cachées sont l'arête SE et les deux côtés DE et AE.

En projetant les sommets du polygone de base sur la ligne de terre, et joignant au point s' les points a', b', c', d', e' ainsi obtenus, on aura les projections verticales des arêtes de la pyramide. Pour un spectateur placé en avant du plan vertical à une distance infinie, il est clair que les seules faces vues sont les faces antérieures SBA, SAE, SED; les deux faces postérieures SBC, SCD sont cachées; donc en projection verticale toutes les arêtes latérales seront vues, sauf SC qui sera cachée.

On demande de couper cette pyramide par un plan vertical dont la trace horizontale est $\lambda\theta$; il suffit d'appliquer à chaque arête le problème du n° 40. Considérons par exemple l'arête SC ; par le point γ où sa projection horizontale sc rencontre $\lambda\theta$, on mènera une ligne de rappel $\gamma u \gamma'$ jusqu'à sa rencontre avec la projection verticale $s'c'$ de SC ; γ' sera la projection verticale de l'un des sommets de la section ; on trouvera de même sur les autres arêtes les points analogues $\alpha', \beta', \delta', \varepsilon'$, et le polygone formé en joignant ces points par des lignes droites sera la projection verticale de la section demandée. Quant à la projection horizontale de cette section, c'est la portion $\alpha\beta\gamma\varepsilon\delta$ de la trace $\lambda\theta$ (n° 3).

La ponctuation du polygone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ n'offre aucune difficulté ; tout côté est visible ou invisible suivant qu'il appartient à une face vue ou à une face cachée. Or, nous avons déjà dit qu'en projection verticale les deux seule faces cachées étaient SBC, SCD ; donc tous les côtés du polygone $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ sont vus, sauf $\beta'\gamma'$ et $\gamma'\delta'$.

Cependant nous avons tracé ces deux côtés en ligne pleine sur notre épure, absolument comme les autres. C'est que nous avons représenté sur l'épure, non la pyramide entière, mais seulement le tronc compris entre la base et la section. Dans cette hypothèse, la petite pyramide comprise entre le sommet et la section étant supprimée, la section devient une face antérieure du corps représenté ; elle est vue tout entière ; les portions des arêtes comprises entre le sommet et la section doivent d'ailleurs être dessinées comme des lignes de construction, c'est-à-dire à l'aide de traits interrompus.

Nous avons encore sur l'épure cherché la vraie grandeur de la section. Il suffit pour cela de prendre le plan vertical de la section pour plan de projection auxiliaire. $\lambda\theta$ est alors la ligne de terre, et la nouvelle projection de chaque point s'obtient en portant au-dessus de $\lambda\theta$ la cote de chaque sommet; ainsi pour le sommet (γ,γ') on prendra la perpendiculaire $\gamma\gamma'_1$ égale à la cote $u\gamma'$. En joignant successivement par des droites les points α_1', β_1', γ_1', δ_1', ε_1' obtenus d'une manière analogue, on aura la section en vraie grandeur.

Section d'un prisme par un plan perpendiculaire au plan vertical de projection.

49. Avant de traiter la question proposée, nous démontrerons le principe suivant :

Quand deux droites MN *et* RS *sont égales et parallèles, leurs projections* mn *et* rs *sur un même plan quelconque* H *sont égales et parallèles entre elles* (Pl. V, fig. 35).

En effet, en joignant MR et NS, on obtient dans l'espace un parallélogramme MRSN, dont la projection *mrsn* doit être aussi un parallélogramme, puisque les droites parallèles ont leurs projections parallèles (n° 5) ; donc $mn = rs$.

Cela posé, soit d'abord à représenter un prisme oblique dont on donne la base *abcde* située dans le plan horizontal, et une arête latérale $(aa_1,\ aa_1')$ (Pl. V, fig. 36).

Les arêtes latérales devant avoir des projections horizontales égales et parallèles, on mènera par b, c, d, e, des droites bb_1, cc_1, dd_1, ee_1, égales et parallèles à aa_1 ; puis l'on tirera les droites a_1b_1, b_1c_1, c_1d_1, d_1e_1, e_1a_1, qui seront les projections horizontales des côtés de la base supérieure et qui se trouveront, comme de raison, parallèles aux côtés correspondants de la base inférieure. Pour un observateur placé à l'infini et au-dessus du plan horizontal, les faces latérales ABB_1A_1, BCC_1B_1 et la base supérieure $ABCD_1E_1$ sont vues, les autres faces latérales et la base inférieure sont cachées ; d'où il suit qu'en projection horizontale les seules lignes cachées sont *ae*, *ed*, *dc*, *ee dd*.

En projetant les sommets du polygone de base sur la ligne de terre, et menant par les points a', b', c', d', e' ainsi obtenus des droites égales et parallèles à $a'a'_1$, on aura les projections verticales des arêtes latérales; les extrémités a_1' b_1' c_1' d_1' e_1' seront les projections verticales des sommets de la base supérieure, et ils se trouveront sur une même droite parallèle à la ligne de terre. Pour un observateur placé à l'infini et en avant du plan vertical, les faces latérales BCC_1B_1, CDD_1C_1 sont vues. En projection verticale, les seules lignes cachées seront donc $a'a_1'$ et $e_1e'_1$.

On veut maintenant couper ce prisme par un point perpendiculaire au plan vertical dont la trace verticale est PQ. Il suffit d'appliquer à chaque arête du prisme le problème du n° 40. En considérant par exemple l'arête CC_1, par le point γ' où PQ rencontre $c'c'_1$, on mènera la ligne de rappel $\gamma'u'\gamma$ jusqu'à la rencontre de cc_1. En unissant successivement par des droites les points α, β, γ, δ, ε obtenus d'une manière analogue, on aura la projection horizontale de la section; quant à la projection verticale, c'est la portion $\beta'\alpha'\gamma'\varepsilon'\delta'$ de la trace verticale PQ du plan. Les seuls côtés vus de la projection horizontale $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ de la section sont ceux $\alpha\beta$, $\beta\gamma$ qui sont sur les faces du prisme vues en projection horizontale.

Enfin, pour obtenir la grandeur de la section, nous l'avons projetée sur un plan auxiliaire parallèle à son plan. (Nous aurions pu projeter sur le plan même, mais la projection de la section eût été placée au milieu de la projection verticale du prisme, ce qui eût entraîné quelque confusion.) La nouvelle ligne de terre est λ_1 θ_1 et on obtiendra la projection nouvelle de chaque point en portant au delà de la ligne de terre sur la ligne de rappel correspondante l'éloignement pris sur l'ancienne projection horizontale; aussi pour le point (γ, γ'), par exemple, on abaissera la ligne de rappel $\gamma'u_1$ perpendiculaire à $\lambda_1\theta_1$, et on la prolongera d'une quantité $u_1\gamma_1$ égale à $u\gamma$. En joignant successivement les points $\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1$ obtenus d'une manière analogue, on aura la vraie grandeur de la section.

Résumé et complément des notions acquises sur la représentation des polyèdres.

50. Pour représenter un polyèdre, on indique les projections horizontales et les projections verticales de tous les sommets ; puis on joint ces points dans l'ordre indiqué par la définition du polyèdre, de manière à avoir les projections horizontales et les projections verticales de toutes les arêtes.

Toutes ces opérations se font au crayon. Avant de mettre à l'encre, il faut distinguer sur l'une et sur l'autre projection les arêtes visibles et les arêtes invisibles, afin de dessiner, dans la mise à l'encre, les premières en trait plein, les autres en points ronds.

Il y a deux sortes de parties cachées : 1° celles qui sont cachées par les plans de projection qu'on suppose opaques ; 2° les parties cachées par le corps lui-même.

Occupons-nous d'abord des premières. On appelle premier angle l'angle dans lequel est situé le spectateur. Donc, puisque les plans de projection sont supposés opaques, tout ce qui n'est pas dans le premier angle sera caché. La détermination de la partie de chaque arête qui est vue ou cachée ne peut offrir aucune difficulté après les détails que nous avons donnés à ce sujet au n° 44. Toutefois nous allons indiquer un exemple afin de ne rien laisser à désirer. Soit (fig. 37) un tétraèdre dont on donne les quatre sommets (a,a') (b,b') (c,c') (d,d'); on obtient les arêtes en joignant les sommets deux à deux. Tous les sommets sont ici dans le premier angle, sauf le sommet (a,a') qui est dans le second angle; les trois arêtes issues de (a, a') seront donc cachées depuis leur point commun (a, a') jusqu'à leurs traces verticales (u, u') (v, v') (o, o').

Occupons-nous maintenant des parties du corps qui sont cachées par le corps lui-même.

On convient qu'un point est visible ou invisible en projection horizontale, suivant qu'il est vu ou non par un observateur situé à une distance infinie du plan horizontal et au-dessus de ce plan. Pour reconnaître si un point est vu ou caché en projection horizontale, il suffira donc de mener la verticale du point et de chercher ses intersections avec la surface du corps; si le point considéré est le plus haut parmi ceux qui sont communs à la verticale et au corps solide, ce point sera vu : sinon il sera caché. Or, pour trouver les points où une verticale rencontre la surface d'un polyèdre, on mènera par cette verticale un plan à volonté (le plus souvent on prendra un plan parallèle au plan vertical) et on cherchera la section du polyèdre par ce plan vertical conformément à ce que nous avons dit aux nos 40 et 48; les points communs au polygone obtenu et à la verticale seront les points de rencontre de la verticale et de la surface du polyèdre. Ainsi supposons qu'on veuille savoir si le point (γ, γ') (fig. 34) est vu ou caché en projection horizontale; on mènera par la verticale (γ, uz') un plan $\lambda\theta$, et l'on cherchera la section $\alpha'\beta'\gamma'\delta'\varepsilon'$ du polyèdre par ce plan vertical; la verticale rencontre ce polygone en deux points (γ, γ''), (γ, γ'); (γ, γ') étant le plus haut de ces deux points est vu.

On convient qu'un point est visible ou invisible en projection verticale suivant qu'il est vu ou non par un observateur situé à une distance infinie et en avant du plan vertical. Pour le reconnaître, on mènera par le point une perpendiculaire au plan vertical, et l'on cherchera les points où cette perpendiculaire rencontre la surface du polyèdre; si le point considéré est de tous les points trouvés celui qui est le plus en avant du plan vertical, il est vu en projection verticale : sinon il est caché. D'ailleurs, pour trouver les points où une perpendiculaire au plan vertical rencontre la surface d'un polyèdre, on coupe ce polyèdre par un plan passant par cette droite (nos 40 et 49), et on prend les intersections de cette droite et de la section obtenue. Ainsi, veut-on savoir si le point (γ, γ') (fig. 36) est vu ou caché en projection verticale ; on mènera par la perpendiculaire au plan vertical (uz, γ') un plan PR, on cherchera la section $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon$ du polyèdre par ce plan, puis les points communs (γ, γ') et (γ_0, γ') à cette section et à la droite (uz, γ') ; le point (γ, γ'), étant celui des deux qui est le plus en avant du plan vertical, est vu en projection verticale.

51. Le moyen que nous venons d'indiquer pour distinguer les parties vues des parties cachées est infaillible et en outre dépourvu de toute difficulté. Cependant si on avait à l'appliquer à un grand nombre de points, le travail serait long ; aussi convient-il de l'éviter le plus possible et de ne l'employer que dans les cas compliqués et dans la région où il y a une véritable incertitude.

Dans les cas simples, par exemple, pour les prismes et les pyramides qui ont leur base parallèle à l'un des plans de projection, il suffit de savoir lire un peu dans l'espace pour distinguer *à priori* les parties vues et les parties cachées (nos 48 et 49).

52. Dans les cas un peu plus complexes, voici comment on procède :

Supposons qu'il s'agisse de la projection horizontale. D'abord *tout le contour est vu ;* quant aux arêtes projetées à l'intérieur du contour, si l'on sait que l'une d'elles est vue, on pourra conclure qu'il en est de même de toutes celles qui partent de l'extrémité de cette arête qui n'est pas sur le contour extérieur. Si les projections horizontales de deux de ces arêtes intérieures se coupent en un point, on mènera la ligne de rappel de ce point jusqu'à la rencontre des projections verticales des deux arêtes ; on trouvera aussi deux points en projection verticale, l'arête à laquelle appartient celui des deux points qui est le plus haut sera vue en projection horizontale ; l'autre sera cachée.

De même, en projection verticale, le contour extérieur est toujours vu. Quant aux arêtes projetées à l'intérieur de ce contenu, si l'on sait que l'une d'elles est vue, on pourra affirmer qu'il en est de même de celles qui aboutissent à l'extrémité de cette arête qui n'est pas sur le contour. Enfin, si les projections verticales de deux arêtes se coupent, pour savoir laquelle de ces deux arêtes est vue, on mènera la ligne de rappel du point de croisement jusqu'aux projections horizontales des deux arêtes ; on trouvera ainsi deux points en projection horizontale; l'arête à laquelle appartient celui de ces deux points qui est le plus en avant est vue, l'autre est cachée.

Ces principes suffisent entièrement dans la majorité des cas ; et, dans les cas compliqués, on complétera par un emploi judicieux du moyen général donné au n° 51.

Ainsi, revenons au tétraèdre de la figure 37. Pour la projection horizontale, toute la question est de savoir laquelle des arêtes AC et BD est en vue ; or, la ligne de rappel du point de croisement m coupe $a'c'$ en m'' et $b'd'$ en m' ; m'' étant plus haut que m', c'est AC qui est vue en projection horizontale et BD qui est cachée. Le lecteur verra de la même manière que c'est encore AC qui est vue en projection verticale et BD qui est cachée.

53. Prenons pour dernier exemple le parallélipipède $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (Pl. V, fig. 38). Supposons qu'on donne les trois arêtes $(aa_1, a'a'_1)$, $(ab, a'b')$, $(ad, a'd')$ qui partent du sommet (a, a'); on complétera les parallélogrammes $abcd$ et $a'b'c'd'$ qui seront les projections d'une face, on mènera par les sommets B, C, D, des droites égales et parallèles à AA_1, et l'on joindra les extrémités de ces parallèles; les projections seront alors complètes, et il restera à distinguer les parties vues et les parties cachées. En projection verticale, le contour extérieur est vu, et il reste à décider entre les deux systèmes de trois arêtes qui partent les unes de d', les autres de b'_1, quel est celui qui est vu ou caché ; or, la ligne $c'd'$ du premier système croise la ligne $b'b'_1$ du second en un point μ' dont la ligne de rappel coupe cd en μ et bb_1 en μ_1 ; le point μ étant en avant de μ_1 c'est l'arête DC qui est vue en projection verticale, par suite DA et DD_1 le sont également, et le système des trois droites B_1A_1, B_1C_1, B_1B est au contraire caché. En projection horizontale, le contour extérieur est vu, et il y a seulement à voir lequel des systèmes (A_1A, A_1B_1, A_1D_1), (CC_1, CB, CD) est vu ; or, en prenant le croisement ω d'une droite aa_1 du premier système et d'une droite bc de l'autre, et menant la ligne de rappel qui coupe $a'a'_1$ en ω'' et $b'c'$ en ω' ; on voit que, ω'' étant plus haut que ω', AA_1 est vue en projection horizontale, tandis que BC est cachée ; par suite A_1B_1 et A_1D_1 sont vues, et CC_1, CD sont cachées.

S'il a bien compris tous ces détails, le lecteur n'éprouvera dans la suite aucun embarras.

Ajoutons que, dès qu'une portion de droite est la projection d'une ligne vue, elle doit être tracée en traits pleins, quelles que soient les parties cachées qui se projettent sur cette portion de droite.

Notions sommaires sur les ombres.

54. Dans un polyèdre convexe mis en présence d'un point lumineux, il y a deux sortes de faces, des *faces éclairées* et des *faces obscures*. Il y a par suite trois sortes d'arêtes :

1° Des arêtes, intersections de deux faces éclairées, que nous appellerons *arêtes éclairées ;*

2° Des arêtes, intersections de deux faces obscures, que nous appellerons *arêtes obscures ;*

3° Des arêtes, intersections d'une face éclairée et d'une face obscure, que nous nommerons *arêtes mixtes*.

L'ensemble des arêtes mixtes forme une ligne brisée fermée et généralement gauche, à laquelle on donne le nom de *séparative*, parce qu'elle sépare la surface du polyèdre en deux, l'une du côté du point lumineux et qui est éclairée, l'autre du côté opposé au point lumineux et qui est obscure.

Le rayon lumineux, en glissant le long de cette séparative, engendre une surface pyramidale dont cette séparative est la *directrice* et dont le point lumineux est le sommet. Cette surface pyramidale qui enveloppe le polyèdre reçoit le nom de *pyramide d'ombre*; c'est qu'en effet tout point de l'espace situé dans l'intérieur de cette pyramide et au delà du polyèdre, c'est-à-dire du côté de ce polyèdre opposé au point lumineux, ne recoit aucun rayon de lumière, attendu que la ligne droite qui joindrait le point lumineux au point considéré traverse le polyèdre. Si donc on prend l'intersection de cette pyramide d'ombre avec les corps divers qui sont placés au delà du polyèdre, on obtiendra le *contour de l'ombre portée* par le polyèdre sur ces corps.

Ainsi le problème des ombres se réduit à la recherche de la *séparative*, et de l'intersection de la pyramide d'ombre avec les surfaces des corps situés au delà du polyèdre.

Si les dimensions du polyèdre diminuent, l'ombre portée par ce polyèdre sur une surface quelconque occupera une étendue de plus en plus petite; à la limite, si le polyèdre se réduit à un point, l'ombre portée se réduira elle-même à un point. D'après cela (Pl. VI, fig. 39), on est conduit à appeler *ombre d'un point* A sur une surface quelconque plane ou courbe P l'intersection *a* de cette surface et de la droite OA qui passe par le point lumineux O et par le point considéré A; l'*ombre d'une ligne* est le lieu des ombres de ses divers points. Quand cette ligne AB est droite, les rayons lumineux qui s'appuient sur cette droite ne sortent pas du plan OAB, la pyramide d'ombre se réduit donc à un plan, et c'est l'intersection de ce plan d'ombre avec les surfaces des obstacles environnants qui fournit l'ombre de la droite ; en particulier, l'ombre d'une droite AB sur un plan P est une droite *ab*.

35. Lorsque le point lumineux est à l'infini, les rayons lumineux sont parallèles et la pyramide d'ombre devient un prisme. C'est le cas de la plupart des ombres que l'on observe; car, vu l'immense distance du soleil à la terre, les rayons solaires qui tombent sur un corps doivent être considérés comme parallèles. Dans le langage de la théorie des ombres, on appelle *ombres au soleil* toutes les ombres relatives à des rayons lumineux parallèles ; les ombres relatives à un point lumineux sont dites *ombres au flambeau.* Dans leurs dessins, les ingénieurs et les architectes n'emploient que des ombres au soleil; c'est aussi ce que nous ferons dans tous nos exemples d'ombre.

Voici, *pour le cas des ombres au soleil*, deux principes d'une application très-fréquente :

1° *Si une droite* AB *est parallèle à un plan* P (Pl. VI, fig. 40), *son ombre* ab *sur ce plan lui est parallèle et égale*. Car, les parallèles A*a*, B*b* comprises entre une droite et un plan parallèle étant égales, la figure A*ab*B est un parallélogramme.

2° *Si une droite* L *est perpendiculaire au plan horizontal de projection, la projection horizontale de l'ombre qu'elle porte sur un corps quelconque est parallèle à la projection horizontale du rayon lumineux*. En effet, le plan d'ombre de la droite L étant perpendiculaire au plan horizontal, tout ce qu'il contient, et en particulier son intersection avec un corps quelconque se projette sur sa trace horizontale ; or, cette trace est parallèle à la projection horizontale des rayons de lumière, puisque ce plan d'ombre contient le rayon lumineux mené par un point quelconque de la droite L. — Le lecteur énoncera et démontrera la règle analogue pour une droite perpendiculaire au plan vertical.

Cas où l'on connaît la séparative. — Ombre d'un poteau vertical.

56. Dans les cas simples, la connaissance de la forme du corps et de sa position par rapport aux rayons de lumière permet de distinguer immédiatement les faces éclairées et les faces obscures ; la séparative étant ainsi obtenue sans aucun tracé, il ne reste plus qu'à s'occuper de l'ombre portée.

Considérons par exemple un poteau vertical, ayant la forme d'un parallélipipède rectangle dont la base *abcd* (Pl. VI, fig. 41) repose sur le plan horizontal. La projection horizontale de ce polyèdre est le carré *abcd*, et sa projection verticale se réduit au rectangle $a'b'b'_1\ a'_1$, attendu qu'on a pris pour plan vertical de projection un plan parallèle à l'une des faces latérales.

Les projections d'une parallèle aux rayons lumineux sont R et R' ; on voit par leur disposition (si l'on est familiarisé avec l'étude de la ligne droite), que la lumière arrive de haut en bas, de gauche à droite, et d'avant en arrière : donc les faces éclairées sont la face supérieure, la face latérale de gauche, et la face latérale antérieure ; les autres faces sont obscures. — Pour faciliter l'intelligence de ces explications, nous avons fait une figure en perspective (fig. 42) : R est la direction de la lumière, *zox* et *xoy* sont les deux plans de projection et $ABCDA_1\ B_1\ C_1\ D_1$ est le poteau dont on voit en $B\beta\beta'\gamma'_1\ \delta'\delta D$ l'ombre portée sur les plans de projection.

La séparative est donc la ligne brisée $BB_1\ C_1\ D_1\ DAB$ (fig. 42), et son ombre sur les plans de projection sera le contour de l'ombre portée par le poteau sur ces plans.

L'ombre de la verticale BB_1 sur le plan horizontal part du pied b (fig. 41) ; elle est d'ailleurs (n° 55) parallèle à R et se termine à l'ombre β de l'extrémité supérieure B_1, c'est-à-dire à la trace horizontale β des rayons lumineux ($b\beta$, $b_1'\beta'$) qui passe par (b, b'_1).

L'ombre de l'horizontale $B_1 C_1$ sur le plan horizontal est la droite $\beta\gamma$ égale et parallèle (n° 55) à $B_1 C_1$, c'est-à-dire à bc; mais il n'y a d'*utile* que la partie $\beta\beta'$ située en avant de la ligne de terre, ce qui prouve que l'arête $B_1 C_1$ porte ombre sur le plan vertical ; comme cette arête est perpendiculaire au plan vertical, son ombre $\beta'\gamma'_1$ sur ce plan est (n° 55) parallèle à R' ; elle part de β' et s'arrête à la trace verticale γ'_1 du rayon lumineux ($c_1\gamma_1$, $c'_1\gamma'_1$) qui passe par le point (c_1, c'_1).

L'ombre $\gamma'_1\delta'$ de la droite $C_1 D_1$ sur le plan vertical est (n° 55) égale et parallèle à $C_1 D_1$, c'est-à-dire à $c'_1 d'_1$.

Enfin l'ombre de la verticale $D_1 D$ se compose d'une partie située sur le plan vertical, et d'une partie située sur le plan horizontal ; la première est la verticale $\delta'\delta$ du point δ', la deuxième est la parallèle $d\,\delta$ à R menée par d; comme vérification, ces deux droites doivent se rejoindre sur LT.

Conformément à l'usage, nous avons mis des hachures sur les parties du plan horizontal et du plan vertical qui sont dans l'ombre ; on remplace parfois les hachures par une teinte plate.

Méthode des sections.

Ombres d'un écrou sur une encoignure.

57. — Lorsqu'on n'aperçoit pas immédiatement la séparative, on peut la trouver par le procédé suivant qui est connu sous le nom de *méthode des sections* et qui consiste à couper le corps par un plan parallèle aux rayons lumineux et à étudier la distribution de la lumière dans cette section. Les plans sécants auxiliaires le plus généralement adoptés sont des plans perpendiculaires à l'un des plans de projection.

Supposons, par exemple, qu'on ait coupé un polyèdre par un plan vertical xy parallèle au rayon lumineux (R, R') et que $a'b'c'd'e'f'$ soit la projection verticale de la section ainsi faite (fig. 46, Pl. VI); par chacun des sommets de la section on mènera une parallèle à la projection verticale R' du rayon de lumière. On trouvera ainsi trois sortes de droites :

Les unes $a'\alpha'$, $c'\gamma'$ n'ont de commun avec la section que le sommet par lequel on les a menées ; cela indique que ces sommets sont sur des arêtes du polyèdre qui appartiennent à la séparative.

D'autres, comme $b'\beta$, *entrent* dans la section au sommet correspondant b' ; cela indique que ces sommets sont sur des arêtes éclairées.

D'autres enfin, comme $\delta d'$, $\varepsilon e'$ $\varphi f'$ *sortent* de la section aux sommets correspondants d', e', f' ; cela indique que ces sommets appartiennent à des arêtes obscures.

On voit qu'en étudiant de la sorte un petit nombre de sections, on sera complétement fixé sur la position de la séparative. Il estpresque inutile de faire observer qu'on ne devra faire de section que dans les régions où l'on éprouve quelque incertitude ; et là, on en fera autant qu'il en faudra pour lever toute ambiguïté.

58. Comme exemple, cherchons les ombres d'un écrou sur une encoignure formée par deux murs verticaux (Pl. VI, fig. 43).

L'écrou est un prisme droit dont les bases sont des hexagones réguliers parallèles au plan horizontal ; la projection horizontale est l'hexagone régulier $abcdef$; sa projection verticale est comprise dans le rectangle $b'b''e'e''$; les arêtes projetées horizontalement en a, b, f, e, ont respectivement pour projections verticales $a'a''$, $b'b''$, $d'd''$, $e'e''$,

$a'a''$, et $d'd''$ sont aussi les projections verticales des arêtes projetées horizontalement en c et d.

Les deux murs verticaux ont pour traces horizontales, l'un Zv, l'autre Zu; ils se coupent suivant la verticale (Z, ZZ') qui est l'arête de l'encoignure.

Enfin R et R' sont les projections du rayon lumineux.

Les données étant posées, passons à la recherche des ombres.

1° Recherche de la séparative. — Faisons une section par un plan vertical parallèle au rayon lumineux, par exemple par le plan vertical dont la trace horizontale est Zol; les deux arêtes projetées sur cb sont coupées aux points (o, o'), (o, o''), et les deux arêtes projetées sur ef sont coupées aux points (l, l'), (l, l''); de sorte que l'écrou a pour section un rectangle projeté verticalement sur le rectangle $o'o''l''l'$. En menant par les sommets de cette figure des parallèles à R', on voit que les arêtes $(cb, a''b'')$ $(ef, e'd')$ auxquelles appartiennent o'' et l' font partie de la séparative. Si l'on conçoit maintenant que le plan sécant se déplace parallèlement à lui-même depuis la position extrême $a\alpha$ jusqu'à l'autre position extrême $d\delta$, on voit que la séparative est formée par les arêtes verticales projetées en a et d, unies d'une part par les côtés $(af, a'd')$ $(fe, d'e')$ $(ed, e'd')$ de la base inférieure, et de l'autre par les côtés $(ab, a''b'')$, $(bc, b''a'')$, $(cd, a''d'')$ de la base supérieure.

Ces résultats étaient d'ailleurs évidents *à priori* pour qui sait lire dans l'espace ; d'après la direction de la lumière par rapport au corps, on voit que les faces éclairées sont la base supérieure et les trois faces latérales projetées sur af, fe, ed.

L'une des faces obscures $(ab, a'b'b''b')$ est visible ; elle porte des hachures.

2° Recherche de l'ombre portée. — On aura le contour de l'ombre portée par l'écrou en cherchant les ombres portées par les côtés successifs de la séparative.

Le plan vertical et parallèle aux rayons lumineux Zol, qui passe par l'arête de l'encoignure, coupe l'écrou en deux parties ; l'une à gauche qui porte ombre sur le mur Zv, l'autre à droite qui porte ombre sur le mur Zu. Ces deux ombres partielles se rejoignent sur l'arête ZZ', en deux points ω'' et λ' ; on obtient immédiatement ces deux points en prenant les intersections de cette arête $Z'Z$ vaec les rayons lumineux des deux sommets (o, o''), (l, l') du rectangle $(ol, o'o''l''l')$ qui, comme nous l'avons déjà reconnu, appartiennent à la séparative.

La partie de la séparative qui porte ombre sur le mur Zu est $(obafl, o''b''a''a'd'l')$; il faut donc chercher les ombres portées sur ce mur par les sommets (b, b''), (a, a''), $a, a')$, (f, d'). L'ombre β'' portée par (b, b'') s'obtient en prenant l'intersection (β, β'') du plan vertical Zu et du rayon lumineux $(b\beta, b''\beta'')$ mené par (b, b''). On obtient de même les ombres α' et φ' portées par (a, a'), (f, d') ; quant à l'ombre de (a, a''), il est inutile de la chercher directement, vu que le côté vertical $(a, a'a'')$ doit porter une ombre $\alpha'\alpha''$ verticale et égale à $a'a''$, ce qui détermine le point α''. Dès lors, en menant les droites $\omega'\beta''$, $\beta''\alpha''$, $\alpha''\alpha'$, $\alpha'\varphi'$, $\varphi'\lambda'$, on a le contour de l'ombre portée sur le mur Zu.

La partie de la séparative qui porte ombre sur le mur Zv est $(ocdel, o''a''d''d'e\,l')$; on obtient l'ombre correspondante $\omega''\gamma''\delta''\delta'\varepsilon'\lambda'$ en opérant comme dans l'alinéa qui précède. Seulement il y a une partie inutile, c'est celle qui est cachée par l'écrou ; nous l'avons tracée en points ronds ; nous avons en outre mis des hachures sur la partie visible de l'ombre portée.

Méthode des projections obliques. — Ombres de pyramides.

59. On emploie souvent, pour déterminer la séparative, un autre procédé connu sous le nom de *méthode des projections obliques*.

Étant donnés un plan fixe P et une droite fixe D, on appelle *projection oblique*, d'un point A sur le plan P (fig. 40), le pied a de la parallèle Aa menée par le point A à la droite fixe D. — La projection oblique d'une ligne quelconque est le lieu des projections obliques de ses divers points. On voit que cette projection oblique n'est autre que l'ombre portée par la ligne considérée sur le plan P en supposant les rayons lumineux parallèles à la droite fixe D. La projection oblique ab d'une droite AB est une droite.

Cela posé, considérons un polyèdre éclairé par des rayons parallèles et un plan P pris à volonté au delà du polyèdre. Le contour de l'ombre que le polyèdre porterait sur ce plan n'est autre que l'ombre que porterait la séparative, c'est-à-dire la projection oblique de cette séparative sur le plan P, en supposant les projetantes parallèles à la direction donnée de la lumière. — Si donc on projette obliquement sur le plan P tous les sommets du polyèdre, et si on joint leurs projections obliques par des droites de manière à avoir les projections obliques de toutes les arêtes, le polygone rectiligne qui formera le contour de la figure obtenue sera la projection oblique de la séparative ; en d'autres termes, on obtiendra la séparative en reconnaissant les arêtes qui se projettent sur les côtés successifs de ce contour.

Dans la pratique, on choisira le plan P de la manière la plus avantageuse ; on prendra, par exemple, l'un des plans qui doivent recevoir réellement l'ombre du polyèdre ; ce sera le plus souvent l'un des plans de projection ; de cette manière, les tracés seront utilisées doublement ; ils donneront, outre la connaissance de la séparative, l'ombre portée en tout ou en partie.

60. Considérons, par exemple, le tétraèdre quelconque

$(abcd, a'b'c'd')$ (Pl. VI, fig. 43), en le supposant éclairé par des rayons (R, R') parallèles au plan vertical.

Menons par tous les sommets des parallèles à (R,R') et cherchons les traces horizontales α, β, γ, δ de ces parallèles; en joignant ces points deux à deux, on aura la projection oblique du tétraèdre sur le plan horizontal, et le quadrilatère $\alpha\beta\gamma\delta$ sera le contour de l'ombre portée. Quant à la séparative, elle est formée par les arêtes projetées obliquement sur $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\delta$, $\delta\alpha$, c'est-à-dire par les arêtes $(ab, a'b')$, $(bc, b'c')$, $(cd, c'd')$ $(da, d'a')$. D'ailleurs, si par le croisement ω des projections obliques $\alpha\gamma$, $\beta\delta$ des deux autres arêtes $(ac, a'c')$ $(bd, b'd')$ on mène une parallèle $(\omega o o_1, \omega' o' o_1')$ aux rayons lumineux, cette parallèle rencontre l'arête $(ac, a'c')$ en (o, o') et l'arête $(bd, b'd')$ en $(o_1 o'_1)$; et, comme la lumière vient de droite à gauche, on voit que le rayon lumineux arrrive en (o_1, o'_1) et ne saurait arriver en (o, o'), car il devrait traverser le corps; donc l'arête $(ac, a'c')$ est obscure, tandis que $(bd, b'd')$ est éclairée. Donc, enfin, les deux faces ABD, BDC sont éclairées, et les deux autres sont obscures; elles ne portent pas de hachures parce qu'elles sont invisibles.

61. Considérons, en second lieu, une pyramide régulière dont le sommet est (s, s') et dont la base est un hexagone régulier *abcdef* situé sur le plan horizontal. On suppose cette pyramide éclairée par des rayons lumineux parallèles à (R, R'), et on demande son ombre propre et les ombres portées sur les plans de projection (Pl. VI, fig. 45).

Cherchons d'abord la projection oblique sur le plan horizontal; prenons à cet effet la projection oblique σ du sommet (s, s'), c'est-à-dire la trace horizontale du rayon lumineux $(s\sigma, s'\sigma')$ mené par le sommet; les sommets de la base sont eux-mêmes leurs projections obliques, en sorte qu'il suffirait de joindre σ aux divers sommets de l'hexagone pour avoir les projections obliques de toutes les arêtes latérales; traçons seulement les deux extrêmes σf, σc ; $\sigma fabc\sigma$ sera le contour de la projection oblique de la pyramide ; l'ombre portée sur le plan horizontal sera donc $cdef\nu\mu c$, car il faut supprimer le triangle $\sigma\nu\mu$ qui est inutile, l'ombre s'arrêtant à la ligne de terre pour se reporter sur le plan vertical.

Les deux arêtes latérales qui forment la séparative sont celles qui se projettent obliquement sur $\sigma c, \sigma f$, c'est-à-dire $(sc', s'c')$, $(sf, s'f')$; en sorte qu'il y a trois faces latérales éclairées et trois obscures ; d'après la direction de la lumière, on voit que les faces éclairées sont SFA, SAB, SBC ; les trois faces obscures portent des hachures en projection horizontale parce qu'elles sont vues sur cette projection ; mais l'une d'elles seulement SCD porte des hachures en projection verticale, parce qu'elle est seule vue sur cette projection.

Il reste à trouver l'ombre portée sur le plan vertical. Cette ombre est portée par des portions des deux arêtes SF et SC ; elle part de ν et de μ, et aboutit à l'ombre σ'_1 portée par le sommet sur le plan vertical, c'est-à-dire à la trace verticale de la parallèle $(s\sigma_1, s'\sigma'_1)$ au rayon lumineux menée par le sommet.

Notions sur la perspective cavalière.

62. On appelle *perspective cavalière* d'un objet la projection oblique de cet objet sur un plan que l'on prend en général parallèle à l'une de ses faces principales et auquel on donne le nom de *tableau*.

Ainsi, M étant un point quelconque du système à représenter (Pl. VIII, fig. 47), sa perspective cavalière sur le tableau P est le point N où la parallèle menée par M à une direction donnée R rencontre le plan P.

Soit m' la projection du point considéré sur le plan P ; menons m'M et m'N. La direction donnée R restant fixe, quand le point M se déplace dans l'espace, les côtés du triangle $Mm'N$ restent parallèles à eux-mêmes. Donc : 1° $m'N$ conserve une direction constante R'; c'est la direction commune des perspectives cavalières de toutes les lignes perpendiculaires au tableau P; on la nomme *direction des lignes fuyantes*; 2° le rapport $\frac{m'N}{Mm'}$, reste constant; c'est le rapport dans lequel les lignes perpendiculaires au tableau, telles que Mm', sont réduites en perspective cavalière; on l'appelle *rapport de réduction.*

Il résulte de là que, pour tracer la perspective cavalière d'un point M sur un tableau donné P, il suffit de connaître la projection m' du point M sur ce tableau et son éloignement Mm', et de se donner à volonté la direction R' des lignes fuyantes et le rapport de réduction; se donner arbitrairement ces deux quantités revient évidemment à se donner à volonté la direction R des projetantes obliques. — Dès lors, par la projection m' du point, on mènera une parallèle à la direction R', et l'on portera sur cette parallèle une longueur $m'N$ égale à une fraction de l'éloignement Mm' marquée par le rapport de réduction; le plus souvent on prend pour le rapport de réduction les fractions $\frac{1}{2}$ ou $\frac{1}{3}$, et, dans tous les cas, toujours une fraction simple, afin de permettre d'exécuter rapidement le tracé de la perspective; car la qualité fondamentale de ce mode de représentation, c'est la facilité et la rapidité que son tracé comporte.

Ainsi soit (m, m') un point de l'espace dont on veut la perspective cavalière en prenant le plan vertical de projection pour tableau, la fraction $\frac{1}{2}$ pour rapport de réduction, et la ligne R' pour direction des lignes fuyantes (fig. 48, Pl. VIII). Par m', on mènera une droite $m'M$ parallèle à R′ et égale à la moitié de l'éloignement μm; M sera la perspective cavalière demandée.

63. *Si deux droites sont parallèles, leurs perspectives cavalières sont parallèles; si de plus elles sont égales, leurs perspectives sont aussi égales entre elles.*

Toute droite parallèle au tableau a pour perspective cavalière une droite égale et parallèle à elle-même; d'où il suit que toute figure située dans un plan parallèle au tableau conserve en perspective cavalière sa grandeur et son orientation.

Ces remarques, qui se démontrent d'ailleurs, comme pour la projection orthogonale (nos 4 et 5), permettent d'abréger les constructions.

Soit, par exemple, à construire la perspective cavalière d'un cube donné par ses projections ($abco$, $a'b'co$) (fig. 49) en prenant le plan vertical de projection, c'est-à-dire le plan de la face postérieure du cube pour tableau, oy pour direction de ligne fuyante (fig. 50) et $\frac{1}{2}$ pour rapport de réduction. On commencera par reproduire le carré $a'b'co$ tel quel, puisque ce carré, étant dans le tableau, reste le même en perspective; puis par les points a', b', c, o, on mènera des droites fuyantes a'A, b'B, cC, oD, toutes égales à la moitié du côté du cube, et, en joignant AB, BC, CD, DA, on achèvera la perspective de ce solide; le carré ABCD qui représente la face antérieure se trouve égal et parallèle au carré $a'b'co$ qui représente la face postérieure; les quatre autres faces sont en perspective des parallélogrammes.

64. Le plus souvent le plan du tableau est vertical; c'est le plan d'une *élévation*. Alors on y trace habituellement deux axes rectangulaires ox et oz, indiquant l'un la direction des horizontales de front, l'autre celle des verticales; on mène en outre par l'origine o un troisième axe oy, indiquant la direction des lignes fuyantes, c'est-à-dire la perspective cavalière de la perpendiculaire au tableau menée par o; enfin on place sur oy les fractions $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}$ adoptées pour rapport de réduction. De cette manière, la figure 54 indique toutes les données ; les droites oz, ox, oy composent la perspective cavalière du trièdre trirectangle formé par les trois directions principales qu'on rencontre dans les dessins de l'ingénieur et de l'architecte, savoir : la verticale, l'horizontale de front et la perpendiculaire au tableau; oy représente la partie de la perpendiculaire au tableau qui est *en avant* de ce tableau, et oy_1 la partie qui est en arrière. Suivant la direction attribuée à oy l'objet est vu par-dessus ou par-dessous, à droite ou à gauche. Ainsi, sans parler de la face antérieure,

Dans la figure 50, on voit le dessus et la face de droite du cube;

Dans la figure 51, on voit le dessus et la face de gauche;

Dans la figure 52, on voit le dessous et la face de droite;

Dans la figure 53, on voit le dessous et la face de gauche.

Quand on veut faire la perspective cavalière d'un corps, on adopte celle de ces quatre dispositions qui met en évidence les faces sur lesquelles on veut attirer particulièrement l'attention.

La figure 42, de la Planche VI, est une vue cavalière de la figure 41. Après tout ce que nous venons de dire, la construction de cette figure 42 ne saurait offrir aucune difficulté au lecteur, et ce sera pour lui un exercice utile.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Tracer le plan et l'élévation d'une croix, puis construire la perspective cavalière de cette croix.

2. Tracer les projections d'un octaèdre régulier en supposant l'une des diagonales verticales, et une autre diagonale perpendiculaire au plan vertical; puis construire la perspective cavalière de ce solide.

3. Construire les ombres portées par l'octaèdre précédent sur les plans de projections; on suppposera les deux projections du rayon lumineux à 45° sur la ligne de terre.

4. Un obélisque est formé d'un tronc de pyramide à bases carrées surmonté d'une pyramide dont la base est la base supérieure du tronc; les centres, deux bases du tronc et le sommet de la pyramide sont sur une même verticale. Le côté de la base inférieure du tronc a $2^m,70$, celui de la base supérieure a $1^m,80$; la hauteur du tronc est égale à 9 mètres, et celle de la pyramide à $0^m,90$.

Construire à l'échelle de $\frac{1}{90}$ les projections de cet obélisque, et chercher ses ombres sur le plan de projection, en supposant les deux projections du rayon lumineux à 45° sur la ligne de terre.

Faire la perspective cavalière de l'obélisque et de ses ombres.

5. Trouver les ombres d'une croix couchée sur le plan horizontal.

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATION DU PLAN

Des traces du plan.

65. Parmi les divers systèmes de deux droites qu'on peut employer pour déterminer un plan, il convient de remarquer le système particulier formé par les droites suivant lesquelles ce plan coupe les deux plans de projection; nous avons dit que ces droites recevaient le nom de *traces*.

Ainsi, soit $P_1\alpha Q_1$ (Pl. VII, fig. 55), un plan qui coupe la ligne de terre au point α; sa trace horizontale est la droite αQ_1 suivant laquelle il rencontre le plan horizontal de projection H, et sa *trace verticale* est la droite αP_1 suivant laquelle il rencontre le plan vertical V. Après le rabattement de l'un des plans coordonnés sur l'autre, les deux traces sont représentées par deux droites αP, αQ (fig. 56), coupant la ligne de terre au même point α.

Dans le rabattement l'angle de chaque trace et de la ligne de terre n'est pas altéré; ainsi, l'on a (fig. 55 et 56):

$$P\alpha T = P_1\alpha T,\quad Q\alpha T = Q_1\alpha T.$$

Il résulte de là que *l'angle* $P\alpha Q$ *des traces sur l'épure* (fig. 56) *est plus grand que l'angle* $P_1\alpha Q_1$ *que forment les traces dans l'espace* (fig. 55); dans le trièdre formé par les trois droites αT, αP_1, αQ_1, on a, en effet, d'après un théorème fondamental de la géométrie :

$$P_1\alpha Q_1 < P_1\alpha T + Q_1\alpha T,$$

ou, à cause des égalités ci-dessus :

$$P_1\alpha Q_1 < P\alpha T + Q\alpha T;$$

c'est-à-dire, enfin :

$$P_1\alpha Q_1 < P\alpha Q.$$

66. On nomme *plan horizontal* tout plan parallèle au plan horizontal de projection ; *plan vertical* tout plan perpendiculaire au plan horizontal de projection ; *plan de front* tout plan parallèle au plan vertical de projection.

Ces définitions établies, examinons les positions principales qu'un plan peut avoir par rapport aux deux plans coordonnés :

1° *Tout plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés a sa trace sur l'autre perpendiculaire à la ligne de terre.* — En effet, considérons, par exemple, un plan vertical $P\alpha Q$ (fig. 57) ; sa trace verticale αP, c'est-à-dire l'intersection de ce plan et du plan V, est, comme chacun de ces deux plans, perpendiculaire au plan horizontal H, et par suite à la ligne de terre LT ; donc l'angle $P\alpha T$, qui n'est pas altéré dans le rabattement du plan V, sera droit sur l'épure.

Il résulte de là qu'*un plan perpendiculaire à la ligne de terre a ses deux traces perpendiculaires à la ligne de terre au même point*.

2° *Un plan parallèle à la ligne de terre a ses traces parallèles à cette ligne.* — Car, lorsqu'un plan ABCD (fig. 58) est parallèle à une droite LT, il coupe tout plan H ou V, passant par cette droite suivant une parallèle AB ou CD à cette ligne. Dans le rabattement le parallélisme se conserve, ainsi que la distance de chaque trace à la ligne de terre; mais la distance des deux traces est augmentée : sur l'épure elle est plus grande que dans l'espace.

Tout plan parallèle à l'un des plans coordonnés, ne rencontrant pas ce dernier plan, *n'a qu'une trace ;* et *cette trace, située sur l'autre plan de projection, est parallèle à la ligne de terre*, puisque le plan considéré est parallèle à cette ligne. Ainsi un plan horizontal n'a pas de trace horizontale, et sa trace verticale est parallèle à la ligne de terre ; un plan de front n'a pas de trace verticale, et sa trace horizontale est parallèle à la ligne de terre.

Quand un plan est parallèle à l'un des plans bissecteurs des plans coordonnés, ses deux traces sont équidistantes de la ligne de terre; sur l'épure elles sont donc confondues ou symétriques par rapport à LT; on a la première ou la seconde disposition suivant que le plan considéré est parallèle au plan bissecteur du premier et du troisième angle, ou au plan bissecteur du second et du quatrième angle.

Enfin, lorsqu'un plan passe par la ligne de terre, ses traces se confondent avec cette ligne; le plan n'est plus alors déterminé par ses traces; à la condition de passer par la ligne de terre, il faut ajouter une donnée nouvelle, telle qu'un point du plan ou l'inclinaison de ce plan sur l'un des plans coordonnés, etc.

67. La figure 59 renferme les épures relatives aux divers cas que nous venons d'examiner. Nous avons mis la lettre V sur les traces verticales et la lettre H sur les traces horizontales; nous nous conformerons à ces notations dans la suite.

Le plan $V_1\alpha_1H_1$ coupe la ligne de terre.

Le plan $V_2\alpha_2H_2$ est vertical.

Le plan $V_3\alpha_3H_3$ est perpendiculaire au plan vertical.

Le plan $V_4\alpha_4H_4$ est perpendiculaire à la ligne de terre.

Le plan V_5 est horizontal.

Le plan H_6 est de front.

Le plan V_7H_7 est parallèle à la ligne de terre.

Le plan V_8H_8 est parallèle au plan bissecteur du premier et du troisième angle.

Le plan V_9H_9 est parallèle au plan bissecteur du second et du quatrième angle.

On voit que le dessin des traces d'un plan permet de reconnaître immédiatement la position de ce plan par rapport aux plans coordonnés, mais ce mode de représentation, si expressif, est trop particulier, et *il est indispensable*, pour l'exactitude, la généralité et la simplicité des tracés, *de savoir résoudre toutes les questions relatives au plan en supposant ce plan déterminé par deux quelconques des droites qu'il contient. De cette manière, lorsque plus tard on cherchera un plan d'après certaines conditions, on pourra s'arrêter et regarder le problème comme résolu dès qu'on aura trouvé deux droites de ce plan.*

Intersection d'un plan quelconque et d'un plan perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.

68. Supposons qu'on demande l'intersection du plan des deux droites (ab, $a'b'$) (ac, $a'c'$) et du plan vertical dont la trace horizontale est pq (fig. 60, Pl. VIII). Il suffira de chercher, comme nous l'avons expliqué au n° 40, l'intersection de chacune des deux droites avec le plan vertical, et la droite (de, $d'e'$) qui joint les deux points d'intersection (d, d'), (e, e') ainsi obtenus sera l'intersection demandée.

De même, l'intersection (de, $d'e'$) du plan des droites (ab, $a'b'$), (ac, $a'c'$) et d'un plan perpendiculaire au plan vertical et défini par sa trace verticale $p'q'$, s'obtiendra en prenant, comme au n° 40, l'intersection de ce dernier plan et de chacune des deux droites, puis joignant les points (d, d'), (e, e') ainsi obtenus.

69. On opère de la même façon lorsque le premier plan, au lieu d'être défini par deux droites quelconques qui se coupent, est donné par ses traces $V\alpha$, αH (fig. 61). Il suffit de se rappeler que la trace horizontale αH est une droite qui a pour projection horizontale αH et pour projection verticale la ligne de terre αT, et que la trace verticale αV est une droite dont la projection horizontale est la ligne de terre αT et dont la projection verticale est αV.

Cela étant, veut-on l'intersection du plan $V\alpha H$ et du plan vertical dont la trace horizontale est pq, on prendra l'intersection (d, d') du plan vertical pq et de la droite $(\alpha H, \alpha T)$, puis l'intersection (e, e') du même plan vertical et de la droite $(\alpha T, \alpha V)$; et la droite $(de, d'e')$ qui unit les deux points obtenus sera l'intersection cherchée.

Ce problème est fondamental; voilà pourquoi nous y avons insisté ici, bien que nous l'eussions déjà résolu implicitement dans les nos 48, 49, 58, etc.

Connaissant l'une des projections d'une droite d'un plan, trouver l'autre projection.

70. Ce problème ne diffère pas au fond du précédent. En effet, si une droite d'un plan a pour projection horizontale une droite pq (fig. 60 et 61), cette droite n'est autre que l'intersection $(de, d'e')$ du plan donné et du plan vertical dont pq est la trace horizontale.

De même, donner la projection verticale $p'q'$ d'une droite d'un plan, c'est dire que cette droite est l'intersection $(de, d'e')$ du plan donné et du plan perpendiculaire au plan vertical dont $p'q'$ est la trace verticale.

Connaissant l'une des projections d'un point d'un plan, trouver l'autre projection.

71. Supposons donnée la projection horizontale m d'un point d'un plan (fig. 60 et 61); menons par m dans le plan horizontal une droite quelconque pq; le point considéré sera à la fois dans le plan donné et dans le plan vertical dont pq est la trace horizontale; il appartiendra donc à l'intersection $(de, d'e')$ de ces deux plans; et, par suite, il suffira de prendre l'intersection de $d'e'$ et de la ligne de rappel $m\mu$ du point m pour avoir la projection verticale demandée m'.

De même, si l'on donne la projection verticale m' d'un point d'un plan, on mènera par m' dans le plan vertical une droite quelconque $p'q'$; on cherchera l'intersection $(de, d'e')$ du plan donné et du plan perpendiculaire au plan vertical dont $p'q'$ est la trace verticale; puis, la ligne de rappel $m'\mu$ du point m' donnera par sa rencontre avec de la projection horizontale demandée m.

Horizontales et lignes de front.

72. En coupant un plan quelconque $P\alpha Q$ (fig. 62) par des plans parallèles au plan vertical V de projection, on obtient une série de droites GK, IR, US, parallèles à la trace verticale αP; ce sont les *droites de front du plan* $P\alpha Q$.

De même, en coupant le plan $P\alpha Q$ par une série de plans horizontaux, on obtient des droites AB, CD, parallèles à la trace horizontale αQ; ce sont les *horizontales du plan*.

Par chaque point M d'un plan passent une horizontale CD et une droite de front GK du plan.

Ces lignes sont d'un emploi très-commode et très- fréquent; il importe donc de savoir les tracer sur l'épure sans la moindre hésitation. Voici comment on s'y prend :

Pour avoir une horizontale, il suffit de couper le plan donné par un plan horizontal; menons donc (fig. 63) une droite $g'h'$ parallèle à LT, et cherchons l'intersection du plan donné (*bac*, *b'a'c'*) et du plan horizontal dont *g'h'* est la trace verticale; la droite (*gh*, *g'h'*) ainsi obtenue (n° 68) est l'horizontale demandée.

Pour avoir une droite de front, on coupe le plan donné (*bac*, *b'a'c'*) par un plan de front *de*, et l'intersection (*de*, *d'e'*) est la droite cherchée.

73. En somme, les horizontales et les droites de front ont toujours une de leurs projections parallèle à la ligne de terre; c'est la projection verticale pour les horizontales, c'est la projection horizontale pour les lignes de front. Aussi, la recherche d'une horizontale se réduit-elle au fond à se donner la projection verticale dont la direction est connue, et à en déduire la projection horizontale (n° 70). De même, pour tracer une ligne de front, on part de la projection horizontale dont la direction est connue, et l'on en déduit la projection verticale (n° 70).

Lorsqu'on a une première horizontale, le tracé des autres horizontales se simplifie; il suffit de prendre un point sur une des droites qui définissent le plan et de mener par ce point (n° 39) une parallèle à l'horizontale connue. De même, si l'on a une première ligne de front, il suffit, pour en obtenir une autre, de lui mener une parallèle par un point pris sur l'une des droites qui définissent le plan.

On se trouve toujours dans ce dernier cas, lorsque le plan considéré est donné par ses traces (fig. 64) αV et αH, car ces traces sont une ligne de front et une horizontale particulières. Ainsi, veut-on une horizontale du plan VαH, on prendra un point (*g*, *g'*) sur la trace verticale, et l'on mènera par ce point une parallèle (*gh*, *g'h'*) à la trace horizontale; de même, pour avoir une ligne de front du plan VαH, on prendra un point (*d*, *d'*) sur la trace horizontale et l'on mènera par ce point une parallèle (*de*, *d'e'*) à la trace verticale.

Nouvelle solution du problème du n° 71.

74. Pour résoudre le problème du n° 71, on emploie ordinairement une horizontale ou une ligne de front, au lieu d'une droite quelconque du plan, comme nous l'avons fait au numéro cité.

Ainsi, donne-t-on la projection horizontale m d'un point M du plan, on se servira de la ligne de front qui passe par ce point ; à cet effet, on mènera dme (fig. 63), parallèle à LT ; ce sera la projection horizontale de la ligne de front considérée; les deux lignes de rappel dd', ee', donneront la projection verticale $d'e'$ de cette ligne, et enfin la ligne de rappel de m donnera la projection verticale m' demandée. Donne-t-on la projection verticale m', on emploiera l'horizontale du point M ; sa projection verticale $g'm'h'$ s'obtiendra immédiatement en menant par m' une parallèle à LT ; les lignes de rappel $g'g$, hh' donneront ensuite la projection horizontale gh, et enfin, la ligne de rappel de m' donnera la projection horizontale m demandée.

Si l'on connaît déjà une première horizontale et une première ligne de front du plan considéré, on peut, quelle que soit celle des deux projections m ou m' que l'on donne, employer à volonté soit une horizontale, soit une ligne de front. Ainsi, supposons qu'on donne m et qu'on veuille, pour trouver m', employer une horizontale; on mènera par m la parallèle gmh à la direction supposée connue des horizontales; on relèvera l'un des points h ou g, par exemple h en h', à l'aide d'une ligne de rappel, puis par h' on mènera une parallèle à LT jusqu'à la rencontre m' de la ligne de rappel de m.

On se trouve toujours dans ce dernier cas, lorsque le plan considéré est donné par les traces αH et αV (fig. 64). Donne-t-on, par exemple, la projection verticale m' d'un point du plan, on pourra, pour trouver l'autre projection m, se servir à volonté soit de l'horizontale, soit de la ligne de front du point M. Pour employer l'horizontale, on mènera $m'g'$ parallèle à LT, on ramènera g' en g, et par g on mènera la parallèle gh à αH jusqu'à la rencontre de la ligne de rappel $m'\mu$. Pour employer la ligne de front, on tracera $m'd'$ parallèle à αV, on ramènera d' en d sur αH, et par d on conduira la parallèle de à LT jusqu'à la rencontre de $m'\mu$.

Reconnaître la situation d'un point par rapport à un plan.

75. Un point (m, m') et un plan $(bac, b'a'c')$ étant donnés (Pl. VIII, fig. 65), pour reconnaître leur situation relative, on commencera par chercher (n° 74) la projection verticale m'' du point de ce plan dont m serait la projection horizontale [nous nous sommes servi pour cela d'une ligne de front $(pq, p'q')$]. Le point m'', ainsi trouvé, pourra coïncider avec m', être au-dessous de m' ou être au-dessus : dans le premier cas, le point (m, m') sera dans le plan ; dans le second, il sera au-dessus du plan ; dans le troisième, il sera au-dessous.

De même, si l'on cherche (n° 74) la projection horizontale m_1 du point du plan qui a pour projection verticale m' [nous avons employé pour cela la ligne de front $(m'r', m_1r)$], le point m_1 ainsi trouvé pourra coïncider avec m, être en avant de m ou en arrière : dans le premier cas, le point (m, m') sera dans le plan; dans le second, il sera en arrière du plan ; dans le troisième, il sera en avant.

76. Pour reconnaître si une droite donnée est dans un plan donné, il suffit de prendre à volonté deux droites du plan et de voir (n° 35) si la droite donnée rencontre chacune d'elles.

En particulier, si l'on a les traces du plan, on regardera si les traces de la droite sont respectivement sur les traces du plan.

Recherche des traces d'un plan sur les plans coordonnés.

77. Pour trouver la trace horizontale d'un plan, on prendra à volonté deux droites du plan ; on cherchera la trace horizontale de chacune d'elles, et, en menant la droite qui unit les deux points obtenus, on aura la trace demandée. Le choix des deux droites employées doit satisfaire à deux conditions : 1° les traces horizontales des deux droites ne doivent pas sortir de la feuille de dessin; 2° elles doivent être déterminées par deux lignes se coupant sous un angle convenable, ce qui n'arriverait pas si les projections des droites choisies étaient presque perpendiculaires à la ligne de terre. On ne peut pas toujours satisfaire à la première condition, car il peut se faire que la trace horizontale du plan soit tout entière en dehors de la feuille de dessin. Observons enfin que, si l'une des droites employées était horizontale, elle n'aurait pas de trace horizontale, mais sa projection horizontale indiquerait la direction de la trace horizontale du plan.

On opère de même pour trouver la trace verticale du plan. Il est souvent commode, mais il n'est pas indispensable de se servir des deux mêmes droites qui ont permis d'avoir la trace horizontale du plan.

Comme vérification, les deux traces du plan doivent aller couper la ligne de terre au même point. — Si ce point α est dans l'intérieur de la feuille de dessin, on le connaîtra dès qu'on aura cherché l'une des traces du plan, et alors il suffira de déterminer un seul point de la seconde trace et de joindre ce point au point α.

Un plan étant donné, trouver sa trace sur un nouveau plan de projection perpendiculaire à l'un des plans coordonnés.

78. Un plan P étant défini par rapport à deux plans coordonnés H et V, on a très-souvent besoin de trouver sa trace sur un nouveau plan de projection perpendiculaire à l'un des plans primitifs et que l'on rabat conformément aux conventions du n° 22.

Soit LT la ligne de terre, intersection des plans coordonnés H et V (Pl. VIII, fig. 66). Supposons que le nouveau plan de projection soit, par exemple, vertical, et désignons par L_1T_1 sa trace horizontale; la disposition des lettres L_1 et T_1 suffit, comme on sait (n° 22) pour indiquer le sens dans lequel ce plan doit être rabattu sur le plan horizontal.

Cela posé, de quelque manière que le plan P soit défini, on en prendra deux droites à volonté $(ab, a'b')$, $(ac, a'c')$; on cherchera l'intersection (d, d'), (e, e') de chacune de ces droites avec le plan vertical L_1T_1 (n° 40); puis, on déterminera les nouvelles projections verticales d_1', e_1' de ces deux points (n° 22), et la droite $d_1'e_1'$ sera la trace demandée.

79. Dans chaque cas, on choisira les deux droites les plus commodes.

Si l'on connaît, par exemple, la trace horizontale αH du plan P (Pl. VIII, fig. 67), le point α_1 où cette trace coupe L_1T_1 sera un point de la nouvelle trace verticale que l'on cherche; il conviendra donc d'utiliser ce point α_1 s'il est dans l'intérieur de la feuille de dessin; et il ne restera plus alors qu'à trouver un second point de la droite inconnue, à l'aide d'une droite quelconque du plan; il sera même souvent commode de prendre pour cette seconde droite une horizontale telle que *pq;* cette horizontale coupera le plan vertical L_1T_1 en un point projeté horizontalement à l'intersection a de pq et de L_1T_1 ; la cote de ce point sera d'ailleurs égale à la cote pp' de l'horizontale ; pour trouver la nouvelle projection de ce point, il suffira donc d'élever par a sur L_1T_1 la perpendiculaire aa_1' égale à pp'. La droite $\alpha_1 a'_1$ sera la nouvelle trace verticale demandée.

Si le plan est donné par ses traces αH et αV sur les deux plans coordonnés, le plus simple sera d'employer précisément ces deux traces, et de leur faire jouer le rôle des deux droites dont nous avons parlé au n° 78. La trace horizontale donnera immédiatement le point α_1 ; quant à la trace verticale (αT, αV), elle donne le point (o, o') dont la nouvelle projection verticale est o_1' et la droite $\alpha_1 o_1'$ est la nouvelle trace demandée V_1. Toutefois ce tracé simple est d'un emploi moins fréquent qu'on pourrait le croire ; car il suppose que les points α_1, o, et o' soit dans l'intérieur de la feuille, tandis qu'il arrive souvent qu'au moins l'un de ces points est en dehors.

80. Si le nouveau plan vertical L_1T_1 était parallèle à l'ancien et rabattu dans le même sens, la nouvelle trace verticale serait parallèle à l'ancienne ; car ces traces sont les intersections de deux plans parallèles par un troisième, et, puisque LT et L_1T_1 sont parallèles, le rabattement des deux plans verticaux n'altère pas le parallélisme des deux traces si ces rabattements sont de même sens.

Dans ce cas, si l'on donne l'ancienne trace verticale αV, pour avoir la nouvelle $\alpha_1 V_1$, il suffira d'en déterminer un point, par exemple, le point α_1 où la trace horizontale αH coupe L_1T_1 (Pl. IX, fig. 69).

81. Le problème qui vient de nous occuper a de nombreuses applications ; on s'en sert, par exemple, avec succès dans la recherche de la section plane d'un polyèdre.

On sait combien cette recherche est aisée lorsque le plan sécant est perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 48). Or, à l'aide du problème précédent, on peut toujours ramener sans peine le cas général à ce cas simple; il suffit de prendre pour plan de projection auxiliaire un plan perpendiculaire à la fois au plan donné et à l'un des plans de projection primitifs. On détermine la trace du plan donné sur ce nouveau plan (nos 78, 79 et 80) ; on projette le polyèdre sur ce plan, et l'on se trouve alors dans les conditions simples des nos 48 et 49.

Soit, par exemple (Pl. VIII, fig. 68), la pyramide qui a pour base le polygone étoilé $abcdefghkimn$ situé dans le plan horizontal, et dont le sommet est donné par sa projection horizontale o et sa cote. On veut couper cette pyramide par un plan ayant la droite ac pour trace horizontale, et passant par le milieu de la hauteur de la pyramide.

On prendra pour plan vertical de projection un plan vertical perpendiculaire au plan sécant; sa trace horizontale sera une droite LT menée à volonté perpendiculairement à ac.

En prenant, sur la ligne de rappel du point o, une longueur $e'o'$ égale à la cote donnée du sommet, et joignant le point o' aux projections $a', b', c', \ldots$ de $a, b, c, \ldots$ sur LT, on aura les projections verticales $o'a'$, $o'b'$, $o'c'$,... des arêtes de la pyramide; toutes sont visibles sauf $o'b'$ et $o'h'$.

Le milieu e_1' de $o'e'$ est la projection du milieu de la hauteur de la la pyramide; comme ce milieu est dans le plan sécant et que ce plan est perpendiculaire au plan vertical de projection, il suffira de joindre a' et e'_1 pour avoir la trace verticale de ce plan.

Dès lors, on obtient la section en opérant comme au n° 49. Par exemple, pour avoir un sommet de la section, on prendra l'intersection d_1' de la trace a'V et de l'arête $o'd'$, et par d' on mènera une ligne de rappel jusqu'à la rencontre de l'arête od. On trouvera de même les sommets $b_1, n_1, i_1, k_1, h_1, g_1, f_1$. Les sommets a et c sont connus *à priori*; et quant à e_1 et m_1 on les obtiendra en prolongeant

ab_1 et cb_1 jusqu'à la rencontre de moe; cela tient à ce que ab_1 et d_1e_1 sont des portions d'une même droite; il en est de même de b_1c_1 et de m_1n_1. — Cette dernière considération, appliquée à d'autres sommets, fournit de nombreuses vérifications que le lecteur apercevra aisément lui-même.

Sur l'épure, on a représenté le tronc de pyramide compris entre le plan horizontal et le plan sécant, en supposant enlevée la partie de la pyramide qui est au-dessus du plan sécant.

Lignes de plus grande pente d'un plan. — Angles d'un plan avec les plans de projection.

82. Outre les horizontales et les lignes de front, on considère encore dans un plan d'autres lignes très-remarquables qu'on nomme lignes de plus grande pente. La définition de ces lignes est fondée sur le théorème suivant :

Parmi toutes les droites que l'on peut mener par un point M *dans un plan* P, *celle qui fait le plus grand angle avec un autre plan donné* Q *est la perpendiculaire* MI *abaissée du point* M *sur l'intersection* AB *des deux plans* P *et* Q (Pl. IX, fig. 70).

Soient MC une droite quelconque menée par le point M dans le plan P, et N la projection du point M sur le plan Q; NI et NC seront les projections de MI et de MC, et il s'agit de prouver que l'angle MIN est plus grand que l'angle MCN. Or la droite NI, *étant perpendiculaire sur* AB en vertu du théorème des trois perpendiculaires, est moindre que l'oblique NC. Si donc on prend ND égale à NC, les points D et N seront situés de part et d'autre du point I, et l'angle MIN extérieur au triangle MID sera plus grand que l'angle intérieur MDI. Mais les triangles MND, MNC étant égaux comme ayant un angle droit égal compris entre côtés égaux, l'angle MDN est égal à l'angle MCN. Donc, enfin, l'angle MIN surpasse l'angle MCN. C. Q. F. D.

La droite MI prend le nom de *ligne de plus grande pente* du plan P par rapport au plan Q. L'angle de cette ligne avec le plan Q n'est autre que l'angle plan qui mesure le dièdre PABQ. Par chaque point M du plan P passe une ligne de plus grande pente de ce plan par rapport au plan Q, et une seule.

83. Cela posé, revenons à la géométrie descriptive.

Par chaque point d'un plan passent une ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal de projection, et une ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical.

Toute ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal a sa projection horizontale perpendiculaire à la trace horizontale du plan, et toute ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical a sa projection verticale perpendiculaire à la trace verticale du plan.

Dès lors, rien de plus simple que la solution des questions suivantes :

1° *Par un point* (m, m') *d'un plan donné, mener la ligne de plus grande pente par rapport au plan horizontal et trouver l'angle de ce plan avec le plan horizontal* (fig. 71).

De quelque manière que le plan soit donné, on commencera par chercher l'une de ses horizontales; cette horizontale (ab, $a'b'$) et le point (m, m') détermineront le plan. En menant par m la perpendiculaire mp sur ab, on aura la projection horizontale de la ligne de plus grande pente demandée ; puis la projection verticale en résultera, puisque la ligne de pente est située dans le plan (n° 70); il suffira de relever p en p' sur $a'b'$, et de mener $m'p'$. Enfin, pour avoir l'angle du plan avec le plan horizontal, il suffira de chercher l'angle de la droite ($mp, m'p'$) avec ce plan horizontal (n° 45); on mènera mm_1 parallèle à ab et égale à mm', on tirera pm_1 et l'angle mpm_1 sera l'angle demandé.

2° *Par un point* (m, m′) *d'un plan donné, mener la ligne de plus grande pente par rapport au plan vertical et trouver l'angle de ce plan avec le plan vertical* (fig. 72).

De quelque manière que le plan soit donné, on commencera par chercher une de ses droites de front $(cd, c'd')$; puis, en abaissant la perpendiculaire $m'q'$ sur $c'd'$, on aura la projection verticale de la droite demandée ; la projection horizontale mq s'en déduira en reportant q' en q sur cd à l'aide d'une ligne de rappel. Enfin, en menant $m'm'_1$ parallèle à $c'd'$ et égale à mm_1, on aura l'angle $m'q'm'_1$ de la droite $(mq, m'q')$ avec le plan vertical, c'est-à-dire l'angle du plan considéré avec le plan vertical de projection.

84. Souvent, un plan est donné par l'une de ses lignes de plus grande pente.

Si l'on donne, par exemple, une ligne de plus grande pente $(pq, p'q')$ par rapport au plan horizontal (fig. 73), on aura immédiatement autant d'horizontales qu'on voudra ; il suffira de prendre un point à volonté (m, m') sur $(pq, p'q')$, et de mener par m' une parallèle à LT et par m une perpendiculaire à pq. La droite $(ma, m'a')$ sera une horizontale du plan ; sa trace verticale (a, a') appartiendra à la trace verticale du plan qu'on obtiendra en joignant a' à la trace verticale p' de la droite $(pq, p'q')$. La trace horizontale du plan s'obtiendra en menant par la trace horizontale q de $(pq, p'q')$ une perpendiculaire à pq. Comme vérification, cette droite Hq devra passer par le point α où la trace verticale V coupe la ligne de terre ; ce qui fait voir qu'on pourrait se passer du point a' pour avoir la trace verticale V ; il suffirait de mener par p' une droite allant au point de concours α de Hq et de LT.

Perpendiculaire au plan.

85. *Pour qu'une droite* AB *soit perpendiculaire à un plan* VαH, *il faut que sa projection horizontale* ab *soit perpendicu-*

laire à la trace horizontale αH *du plan, et que sa projection verticale* a′b′ *soit perpendiculaire à la trace verticale* αV *du plan* (fig. 74).

En effet, dans l'espace la droite AB est perpendiculaire à la fois sur αH et sur αV (n° 25); d'ailleurs, l'angle droit de AB et de αH doit subsister en projection horizontale, puisque αH est dans le plan horizontal; de même l'angle droit de AB et de αV doit subsister en projection verticale puisque αV appartient au plan vertical.

Ces conditions sont suffisantes, si la droite AB *est DÉTERMINÉE par ses deux projections* ab *et* a′b′.

Soient AB une droite déterminée par les deux projections *ab* et *a′b′*, et un plan VαH donné par ses traces; il s'agit de prouver que si *ab* est perpendiculaire à αH et *a′b′* à αV, la droite AB est perpendiculaire au plan VαH. Or, prenons sur AB un point quelconque (*a*, *a′*) et concevons par ce point la perpendiculaire AX au plan VαH; la projection horizontale de AX devra passer par *a*, et, en outre, d'après le théorème direct, être perpendiculaire sur αH; cette projection sera donc *ab*. De même, la projection verticale de AX sera *a′b′*. Donc, puisque par hypothèse il n'y a qu'une droite qui ait *ab* et *a′b′* pour projections, il faut que AB et AX coïncident, c'est-à-dire que AB soit perpendiculaire au plan VαH.

86. De là découle le moyen de mener, par un point donné, une perpendiculaire à un plan donné (fig. 75).

De quelque manière que le plan soit donné, on commencera par se procurer une horizontale (*hk*, *h′k′*) et une ligne de front (*fg*, *f′g′*) de ce plan. Puis (*m*, *m′*) étant le point donné, on mènera *mp* perpendiculaire sur *hk*, et *m′p′* perpendiculaire sur *f′g′*; *mp* et *m′p′* seront les projections de la perpendiculaire au plan.

Toutefois ces deux projections ne détermineront pas la droite si le plan donné est parallèle à la ligne de terre ou contient cette ligne. Dans ce cas, pour achever de déterminer la droite, on aura recours à un plan vertical de projection auxiliaire. On choisit le plus souvent pour ce plan auxiliaire le plan perpendiculaire à LT qui projette horizontalement la droite. Ainsi soient (fig. 76) un plan parallèle à LT dont les traces sont V et H, et (m, m') un point par lequel on veut mener une perpendiculaire sur ce plan. Les projections de la perpendiculaire sont confondues, suivant la perpendiculaire mm' à LT. Prenons pour plan vertical auxiliaire le plan perpendiculaire à LT mené par le point donné (m, m') ; la droite mm' sera notre nouvelle ligne de terre L_1T_1; déterminons la nouvelle projection verticale m'_1 du point (m, m'), ainsi que la nouvelle trace verticale H_1V_2 du plan VH ; puis, abaissons de m'_1 la perpendiculaire $m_1'a$ sur H_1V_2 ; la perpendiculaire au plan sera alors déterminée par sa projection horizontale ma et par sa projection verticale auxiliaire m'_1a. Sa trace horizontale est le point a qui se projette verticalement en a', en sorte qu'on peut aussi considérer la perpendiculaire comme déterminée par les deux points (m, m') (a, a'). — (Nous n'avons pas expliqué comment on obtient la trace verticale du plan HV sur le plan auxiliaire L_1T_1, attendu que c'est l'application de la règle du nº 79 à un cas particulier; toutefois, comme ce cas est très-usuel et que nous écrivons pour des commençants, nous rappellerons qu'il suffit de prendre les intersections de chacune des traces H et V avec le nouveau plan vertical L_1T_1 et de joindre les nouvelles projections verticales des deux points ainsi obtenus. La trace H perce le plan vertical L_1T_1 au point H_1 qui ne bouge pas dans le rabattement de ce plan vertical ; la trace V coupe le même plan au point V_1 qui dans le rabattement vient en V_2 à une distance $a'V_2$ égale à $a'V_1$; donc H_1V_2 est la nouvelle trace demandée.)

87. Résolvons maintenant le problème inverse : *Par un point donné mener un plan perpendiculaire à une droite donnée* (fig. 77).

De quelque manière que la droite soit donnée, on se procurera deux projections qui la déterminent. Soient ab, $a'b'$ ces deux projections et soient m et m' les projections du point donné (sur les mêmes plans coordonnés). En menant mp perpendiculaire à ab et $m'p'$ parallèle à LT, on aura une horizontale du plan cherché. En menant $m'q'$ perpendiculaire à $a'b'$ et mq parallèle à LT, on aura une ligne de front du plan inconnu qui sera dès lors complétement déterminé. Si l'on veut les traces, on prendra la trace horizontale q de $(mq, m'q')$ et on mènera la perpendiculaire qH à ab, puis on prendra la trace verticale p' de $(mp, m'p')$, et on mènera la perpendiculaire Vp' à $a'b'$. Comme vérification, Vp' et Hp devront se couper en un même point α de LT. Lorsque le point α est dans les limites de la feuille de dessin, on voit que l'une des deux droites $(mp, m'p')$, $(mq, m'q')$ suffit; on se contentera donc de tracer par exemple l'horizontale $(mp, m'p')$, par p' on mènera la perpendiculaire Vp' sur $a'b'$, puis par α la parallèle αH à mp.

Droite et plan parallèles. — Plans parallèles.

88. *Pour mener par une droite donnée* AB *un plan parallèle à une autre droite donnée* CD, on mène, par un point A pris à volonté sur la première, une parallèle AE à la seconde, et le plan de l'angle BAE est le plan demandé. — Le problème est indéterminé, lorsque les droites AB et CD sont parallèles.

89. Soit proposé de *mener par un point danné* M *un plan parallèle à un plan donné* P.

De quelque manière que le plan P soit donné, on tracera à volonté dans ce plan deux droites qui se coupent, et on leur mènera des parallèles par le point M; le plan de ces deux parallèles sera le plan cherché.

Si l'on connaît les directions des traces du plan P, on aura par là même (nº 5) les directions des traces du plan cherché, puisque deux plans parallèles ont leurs traces horizontales parallèles entre elles ainsi que leurs traces verticales. Il suffira donc d'obtenir un point de chaque trace du plan inconnu; on y arrivera en menant par M la parallèle à une droite choisie à volonté dans le plan P et cherchant les deux traces de cette parallèle. Ainsi soient $V\alpha H$ (Pl. IX, fig. 78) le plan et (m, m') le point donnés; prenons une droite $(ef, e'f')$ de ce plan; par (m, m') menons la parallèle $(rs, r's')$ à cette droite; cherchons les traces s et r' de cette droite; en menant par r' la parallèle V_1r' à $V\alpha$ et par s la parallèle sH_1 à $H\alpha$, on aura les deux traces du plan demandé; ces deux lignes iront se couper en un même point α_1 de la ligne de terre, ou seront parallèles à cette ligne, suivant que le plan donné coupera lui-même la ligne de terre ou lui sera parallèle.

On peut éviter le tracé de la droite $(ef, e'f')$ du plan donné, en menant par (m, m') une parallèle $(mp, m'p')$ à la trace horizontale $H\alpha$ et une parallèle $(mq, m'q')$ à la trace verticale $V\alpha$. On aura ainsi une ligne horizontale et une droite de front du plan inconnu. En menant par la trace verticale p' de la première une parallèle à $V\alpha$ et par la trace horizontale q de la seconde une parallèle à $H\alpha$, on aura les deux traces V_1p', H_1q du plan inconnu qui devront se croiser sur LT ou être parallèles à cette ligne. Cette vérification montre même que l'une des deux lignes $(mp, m'p')$, $(mq, m'q')$ suffira toutes les fois que le point de croisement α_1 sera dans les limites de la feuille de dessin. En menant, par exemple, l'horizontale, on aura le point p', d'où l'on déduira la trace verticale $V_1\alpha_1$ et ensuite la trace horizontale αH_1 en tirant par α_1 la parallèle à $H\alpha$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Un plan passe par un point donné et par une droite

qui coupe à angle droit la ligne de terre et est également inclinée sur les deux plans de projection ; trouver les traces de ce plan.

2. Un plan est donné par une ligne de plus grande pente ; mener par un point donné un plan parallèle à ce plan.

3. Par un point donné, mener une perpendiculaire au plan déterminé par ce point et par la ligne de terre.

4. Exécuter les constructions indiquées au nº 88 et chercher les traces du plan demandé.

5. Un tétraèdre étant donné, mener ses hauteurs et vérifier qu'elles se croisent au même point.

6. Deux plans ont leurs traces horizontales parallèles entre elles et leurs traces verticales parallèles entre elles. Peut-on conclure de là le parallélisme des deux plans ?

7. Quelles conditions doivent remplir les traces des deux plans parallèles à la ligne de terre, pour que ces deux plans soient parallèles entre eux ?

8. On donne un triangle ABC par sa projection horizontale abc, et par les cotes de ses trois sommets : on a $ab = 7^m,2$, $bc = 5^m,3$, $ca = 3^m,7$, et les cotes des sommets A, B, C, sont respectivement $8^m,2$, $6^m,4$, $3^m,6$. Par le point du plan ABC qui a pour projection horizontale le centre du cercle circonscrit à abc, élever à ce plan une perpendiculaire égale à $9^m,5$, et représenter le tétraèdre qui aurait pour base ABC et pour sommet l'extrémité de la perpendiculaire.

9. On donne une pyramide quadrangulaire dont la base est dans le plan vertical et dont le sommet se projette verticalement sur la droite qui joint les points de concours des côtés opposés de la base. — On demande de mener par un point de l'une des arêtes de la pyramide un plan qui la coupe suivant un parallélogramme, et de représenter le tronc de pyramide ainsi obtenu.

CHAPITRE V

APPLICATIONS

Objet de ce chapitre.

90. La théorie des ombres et la perspective cavalière nous ont fourni une première série d'applications (chapitre III). Nous allons maintenant emprunter quelques exemples simples à la coupe des pierres et à la charpente.

Murs en pierre de taille.

91. Un mur se compose de couches ou *assises* horizontales, superposées les unes aux autres et formées chacune de plusieurs pierres. La face apparente d'une pierre prend le nom de *parement* et on nomme *joints* ou *lits* les faces cachées; les joints sont les faces verticales suivant lesquelles se touchent les pierres consécutives d'une même assise; les lits sont les faces horizontales par lesquelles les pierres d'une assise sont en contact avec celles de l'assise inférieure et de l'assise supérieure.

Les pierres se forment dans la carrière par couches planes à peu près parallèles; on les extrait sous forme de prismes droits dont les bases sont dirigées suivant ces couches et reçoivent le nom de *lits de carrière*. Or l'expérience a démontré que la pierre résiste le mieux lorsque les forces qui s'exercent sur elle sont perpendiculaires au lit de carrière ; on se rend compte de ce fait en comparant la pierre à un livre qui, posé à plat, supporte de grands fardeaux sans se rompre, tandis qu'une action oblique assez faible le déforme aisément. Il faut donc, dans la construction de tout édifice, placer la pierre de telle sorte que son lit de carrière soit à peu près normal aux pressions que le bloc doit supporter ; voilà pourquoi dans les murs les lits doivent être horizontaux. « Ainsi, « en puisant dans les entrailles de la terre les matériaux « dont il se servira, l'architecte y trouve le principe de « leur création et le secret de leur solidité. Il n'a donc « plus qu'à transporter à son ouvrage les lois que la na- « ture a observées dans le sien (1). »

92. Un mur *droit* est celui qui est compris entre deux plans verticaux et parallèles. Tous les joints d'un tel mur sont verticaux, tous les lits sont horizontaux. Les joints d'une même assise ne doivent jamais correspondre à ceux de l'assise supérieure ou de l'assise inférieure ; le mieux est de les faire correspondre au milieu de la pierre placée soit au-dessus, soit au-dessous, afin que, si une disjonction vient à se produire dans une assise, elle ne se propage pas dans les assises suivantes. Cette disposition, non-seulement assure la solidité, mais encore la rend évidente, ce qui importe beaucoup, car l'apparence de la solidité est un des éléments de la beauté d'un édifice. Lorsque toutes les pierres ainsi disposées ont les mêmes dimensions, on a cet appareil simple et parfait que Vitruve appelle *opus isodomum* et que l'on admire dans les belles constructions des anciens Grecs; tels sont les murs du Parthénon, du temple d'Érechthée, etc. Nous avons figuré cet appareil en perspective (Pl. X, fig. 79) et en projection horizontale (fig. 80).

(1) Ch. Blanc, *Grammaire des arts du dessin*.

Ces murs si réguliers et d'un aspect si imposant sont très-dispendieux, chaque pierre devant avoir une longueur égale à l'épaisseur du mur. Voici une disposition moins coûteuse quoique produisant encore un très-bel effet. Il suffit de placer les pierres de façon qu'elles présentent alternativement au spectateur leur face longue et leur face étroite. La figure 81 est une vue cavalière de ce nouvel appareil. Les pierres telles que A qui sont vues par leur face longue prennent le nom de *carreaux ;* dans notre exemple il faut deux carreaux juxtaposés pour faire l'épaisseur du mur. Les pierres telles que B, qui n'apparaissent que par leur petit bout et dont la longueur égale l'épaisseur du mur, reçoivent le nom de *boutisses*. Enfin les pierres qui, comme celles de l'*opus isodomum* (fig. 79), forment par leur largeur l'épaisseur du mur sont appelées *parpaings*.

On peut aussi former une assise de boutisses, puis une assise de carreaux, puis une assise de boutisses, et ainsi de suite alternativement. La figure 82 montre cette troisième disposition que les Athéniens avaient adoptée, par exemple, pour la terrasse du temple de la Victoire Aptère, tandis que pour les murs du temple même ils avaient employé l'*opus isodomum*.

93. Un mur est en talus dès que l'un des plans qui le comprennent cesse d'être vertical. La figure 83 est la projection d'un mur en talus sur un plan vertical perpendiculaire aux longues arêtes ; le plan qui limite ce mur à gauche est vertical, mais le plan qui le limite à droite est incliné sur l'horizon ; on indique la grandeur du talus par une fraction $\frac{M'Z'}{E'Z'}$ dont le numérateur est le *reculement* M'Z' et dont le dénominateur est la hauteur E'Z'. On appareille encore ici par assises horizontales T'C', R'S', P'Q' ; mais, si l'on prolongeait ces assises jusqu'au plan incliné, la dernière pierre à droite, dans chaque assise, offrirait un angle aigu, et comme un pareil angle résiste peu et se détériore promptement, il convient de l'éviter; pour cela, on arrête les coupes horizontales T'C', R'S', P'Q' à un plan fictif C'S'Q' parallèle au talus, puis, à partir de là, on dirige les coupes perpendiculairement au talus, comme l'indiquent les droites C'D', S'H', Q'G'. Quant à la dernière pierre de l'assise inférieure, pour éviter l'angle aigu qui serait enfoui dans le sol, on coupe par un plan vertical E'F' mené suivant la droite E' d'intersection du sol et du mur. De cette façon la pierre est un prisme qui a pour section droite la figure A'B'C'D'E'F'; la projection horizontale de ce prisme est $acdee_1d_1c_1a_1$ (fig. 84), sa perspective cavalière est en $ABCDEFB_1C_1D_1E_1F_1$ (fig. 85).

La taille de cette pierre n'offre aucune difficulté. On choisit un solide capable ayant la forme d'un parallélipipède rectangle dont les dimensions soient au moins égales à AF, FF_1 et à la hauteur du point D. Sur la face inférieure, c'est-à-dire sur le lit de carrière préalablement dressé, on applique le panneau aee_1a_1 fourni par la projection horizontale; en abattant la pierre à angle droit, à l'aide de l'équerre, le long de AF et de A_1F_1, on aura les plans des deux têtes sur chacun desquels on appliquera le panneau A'B'C'D'E'F' fourni par la projection verticale; dès lors on aura deux directrices de chacune des autres faces dont on dressera les plans à l'aide de la règle.

La figure 86 offre un second exemple de mur en talus; c'est un mur de perron dont la description serait évidemment superflue après tout ce que nous venons de dire.

Nous préférons appeler l'attention sur ce principe que nous avons rencontré et qui est fondamental dans la théorie des constructions : *Dans le tracé de tout bon appareil, il faut éviter les angles trop aigus.* C'est qu'à un angle aigu d'une pierre correspond dans la pierre adjacente un angle obtus qui offre plus de résistance que le premier, en sorte que, dans l'action mutuelle des deux blocs, l'angle aigu tend à se briser.

Plate-bande.

94. On nomme plate-bande l'appareil d'une porte ou d'une fenêtre dont la face horizontale supérieure est plane. Les parties latérales portent le nom de *piédroits* ou de *jambages*. Considérons la porte représentée en élévation dans la figure 87; la projection horizontale (fig. 88) montre clairement la forme des piédroits; ce sont des prismes droits dont les sections droites sont XABCDEY, $X_1A_1B_1C_1D_1E_1Y_1$. On distingue sur un piédroit plusieurs faces : aux droites AX et EY répondent les faces du mur dans lequel l'ouverture est pratiquée; XX_1 est la face extérieure et YY_1 est la face intérieure; le plan vertical dont la trace est AB prend le nom de *tableau;* puis, vient un renfoncement BCD ou espèce de rainure qui reçoit les gonds de la porte et la porte elle-même lorsqu'elle est fermée, et qu'on nomme *feuillure;* enfin à la divergente DE correspond un plan vertical contre lequel vient s'appliquer le vantail de la porte lorsque cette porte est ouverte, et auquel on donne le nom de face d'*ébrasement*.

On divise les piédroits en assises horizontales qui ne sont autres que les assises du mur; quant à la partie plane supérieure, on la compose de plusieurs pierres de la manière suivante : après avoir marqué sur $B'B'_1$ un nombre impair de points de division, on joint ces points G′, H′, K′, I′ au sommet O′ d'un triangle équilatéral $B'B'_1O'$ construit sur $B'B'_1$; puis par les droites O′G′, O′H′, O′K′, O′I′ on mène des plans perpendiculaires aux faces du mur; les claveaux ainsi disposés se soutiennent mutuellement à cause de la convergence des joints; le claveau du milieu H′K′K″H″ prend le nom de *clef*.

Pour aider le lecteur à se rendre un compte exact de la forme des claveaux, nous avons fait (fig. 89) une perspective cavalière de la dernière pierre à gauche M'B'G'R'S'T'.

Nous devons ajouter que cet appareil, si repandu de nos jours dans nos maisons d'habitation, manque de solidité lorsqu'il a à supporter une charge un peu considérable; pour pallier ce défaut, au moins dans une certaine mesure, on relie les claveaux soit par des crampons en fer, soit par une barre de fer dans laquelle ils sont tous enfilés comme les grains d'un chapelet. Nous reviendrons d'ailleurs sur ce point, dans la seconde partie, à propos des voûtes.

Assemblages à tenon et mortaise. — Embrèvements.

95. Les pièces de bois employées dans la composition d'une charpente sont de longs prismes dont la section droite est en général un rectangle; l'axe de la pièce est la droite qui serait menée par le centre de ce rectangle parallèlement aux arêtes.

Quand deux pièces sont assemblées, il convient que leurs axes se rencontrent, sans quoi des mouvements de torsion se produiraient qui compromettraient gravement la stabilité de la construction. Nous supposerons donc toujours cette condition remplie dans cette étude, qui a pour but de faire connaître quelques-unes des dispositions le plus fréquemment adoptées dans les *assemblages;* on désigne par ce nom l'ensemble des parties saillantes et des entailles creuses que l'on pratique sur les deux pièces, au point de réunion, afin de rendre leur joint invariable.

96. L'assemblage type auquel on peut rattacher la plupart des autres est l'assemblage *à tenon et mortaise.* Cet assemblage est *droit* ou *oblique*, suivant que les deux pièces considérées se rencontrent sous un angle droit ou aigu.

Occupons-nous d'abord de l'assemblage droit; il est représenté dans la figure 90 (Pl. XI) en projection et dans les figures 93 et 94 en perspective cavalière. Les deux pièces A et B ont pour sections droites des carrés égaux, ou, comme disent les charpentiers, ont même *équarrissage*. La pièce A porte une partie saillante que l'on nomme *tenon* et dans la pièce B est creusée une entaille qu'on nomme *mortaise* et qui est destinée à recevoir le tenon. Si les deux pièces A et B (fig. 93 et 94) étaient simplement juxtaposées, la première serait limitée à la section droite EFGH qui serait appliquée sur le rectangle $E_1F_1G_1H_1$ de la pièce B; au lieu de cela, on décompose le rectangle EFGH en trois rectangles partiels égaux entre eux en menant des parallèles à EH par les points I et P qui divisent le côté EF en trois parties égales; puis, on ne coupe la pièce que suivant les deux petits rectangles extrêmes FGMP, EHKI, et on laisse subsister le bois dans le rectangle intermédiaire, de manière à former un petit prisme IKMPNUSR qui a pour section droite ce rectangle intermédiaire et pour hauteur les deux tiers de l'épaisseur de la pièce B. C'est ce prisme droit qui est le tenon et qui, quand le rectangle EFGH vient s'appliquer sur $E_1F_1G_1H_1$, s'insère dans une entaille identique creusée sur la pièce B; cette entaille, qui est en quelque sorte comme le moule du tenon, est la *mortaise*.

Dans les figures 93 et 94 en perspective, les deux pièces ont été un peu séparées afin de mieux montrer la disposition de chacune d'elles. Dans la figure 90, qui est une projection sur un plan parallèle aux axes, les deux pièces sont agencées. Cette projection si simple n'a pas besoin d'explication. On peut la considérer comme une projection horizontale ; alors les figures 91 et 92 sont, la première, la projection de la pièce B sur un plan vertical parallèle à ses arêtes, et la seconde la projection de la pièce A sur un plan vertical parallèle à ses arêtes.

Ces trois projections 90, 91, 92 suffisent pour tailler les deux pièces. Pour pouvoir tailler une pièce de charpente, il suffit en effet de connaître ses projections sur des plans parallèles à deux faces adjacentes ; en reportant ces dessins sur les faces correspondantes, on a toutes les données nécessaires pour guider l'ouvrier dans l'exécution des coupes successives.

Quand, après avoir fait l'une des projections de la pièce, on procède au tracé de la seconde projection, on dit, en langage de charpentier, qu'on donne *quartier* à la pièce. Voici l'origine de cette dénomination : imaginons la pièce placée sur la première projection que nous nommerons projection horizontale ; au lieu de supposer qu'on redresse à angle droit une portion de la feuille de dessin et que l'on projette la pièce sur le plan vertical ainsi obtenu, on peut imaginer qu'on laisse le plan de la feuille invariable et qu'on fasse au contraire chavirer la pièce d'un angle droit autour de l'une de ses arêtes; en projetant la pièce dans cette nouvelle position, c'est-à-dire après qu'on l'a fait tourner d'un *quart* de tour, on obtient évidemment le même résultat qu'en opérant de la première manière. Ainsi, donner quartier à une pièce, c'est la projeter après l'avoir fait tourner de 90° ou d'un quart de tour, ce qui revient à projeter la pièce supposée immobile sur un plan vertical parallèle aux arêtes et à rabattre ce plan.

97. La figure 95 représente la projection sur le plan des axes de deux pièces assemblées obliquement à tenon et mortaise; on a donné quartier à la pièce A dans la figure 96 et à la pièce B dans la figure 97; enfin les figures 98 et 99 sont deux perspectives cavalières différentes de la pièce A; dans chacune de ces deux figures, comme dans la plupart des perspectives que nous ferons désormais, on n'a marqué que les parties vues.

Le rectangle EFGD a été divisé en trois parties égales au moyen des droites IP, HQ, et c'est le prolongement de la partie intermédiaire qui forme le tenon IPQHMNLK. Seulement ici la face supérieure du tenon n'est plus le prolongement de la face supérieure de la pièce; si l'on adoptait cette disposition, c'est-à-dire si la projection du tenon sur le plan des axes était le parallélogramme $f\omega ke$, la mortaise serait difficile à fouiller exactement, et de plus elle présenterait en f un angle aigu ωfs qui risquerait d'éclater sous l'effort de la pièce A; enfin, la mise en place des deux pièces offrirait des difficultés; pour ces raisons on termine supérieurement le tenon par une face QNMP normale à la face d'entrée de la pièce B; la projection du tenon sur le plan des axes est alors $fmke$.

98. Dans l'assemblage précédent tout l'effort nécessaire pour s'opposer au glissement de la pièce A est supporté par l'*about* QMNP du tenon et par la face correspondante de la mortaise; le tenon serait souvent trop faible pour résister à cet effort, d'autant plus que ses fibres sont coupées obliquement par son about, tandis que celles de la mortaise sont au contraire coupées à angle droit par la face correspondante; on voit donc que le tenon risque de se déchirer et qu'il convient de le renforcer. On y parvient en ajoutant un *embrèvement*.

L'assemblage ainsi modifié, et qu'on nomme *assemblage oblique à tenon et mortaise avec embrèvement*, est représenté dans les figures 108, 109, 110, 111, 112 (Pl. XII). La figure 108 est une projection sur le plan des axes des deux pièces; on a donné quartier à la pièce A dans la figure 109 et à la pièce B dans la figure 110. Enfin les figures 111 et 112 sont des vues cavalières de la pièce A qui porte le tenon et l'embrèvement et de la pièce B dans laquelle on a creusé les entailles correspondantes.

Cet assemblage ne diffère du précédent que par l'addition, de part et d'autre du tenon, d'un prisme triangulaire ayant pour section droite le triangle mnp (fig. 108) et pour hauteur le tiers de l'épaisseur de la pièce; le tenon, au lieu de prendre naissance sur le plan *mn*, ne commence qu'au plan *pn*.

Quelquefois, pour des pièces moins importantes, on supprime tout à fait le tenon, il ne reste que l'embrèvement; la figure 115 de la planche XII montre la disposition d'un tel assemblage.

Queue d'hironde. — Assemblage à mi-bois.

99. Quand l'assemblage de deux pièces A et B qui se rencontrent à angle droit (fig. 100, Pl. XI) doit résister à une traction dans le sens de la longueur de la pièce A, on emploie une disposition spéciale qu'on nomme *queue d'hironde*. Telle est, par exemple, la manière dont les solives d'un plancher s'agencent avec les poutres ou sablières placées dans le mur.

La figure 100 est une projection sur le plan des axes; on a donné quartier à la pièce A dans la figure 101, et à la pièce B dans la figure 102; enfin les figures 104 et 103 sont des vues cavalières de l'une et de l'autre pièces.

La queue d'hironde est une espèce de tenon qui n'a que la moitié de l'épaisseur de la pièce A et qui a la forme d'un trapèze *mnpq*; le petit côté *mn* de ce trapèze est les $\frac{3}{5}$ du grand *pq*, lequel est égal à la largeur de la pièce A. On insère la saillie de la pièce A dans l'entaille de la pièce B, par superposition.

100. Quand deux pièces se croisent et se dépassent mutuellement, on emploie, pour assurer l'invariabilité de leur point de croisement, un assemblage à mi-bois qui est représenté par deux pièces obliques A et B dans les figures 105, 106 et 107.

La figure 105 est une projection sur un plan parallèle aux axes; dans la figure 106 on a donné quartier à la pièce B, et la figure 107 est une vue cavalière de cette même pièce B.

Pour saisir cette disposition, il suffit de concevoir que l'espace prismatique dont la base est 1 2 3 4 et dont la hauteur est l'épaisseur commune des deux pièces ait été divisé en deux parties égales par un plan mené à demi-hauteur; dans la pièce A on conserve la moitié supérieure et on enlève la moitié inférieure; on fait l'inverse pour la pièce B. On met les pièces en place par superposition.

Combles. — Fermes.

101. On nomme *comble* la partie d'un édifice qui est la plus élevée et qui supporte la couverture.

Considérons un bâtiment de forme rectangulaire; les murs latéraux (fig. 116, pl. XII) sont terminés supérieurement en forme de triangles DEA, CFB qui portent le nom de *pignons*; on nomme *ligne de faîte* l'horizontale EF qui joint les sommets de ces deux triangles, et l'on appelle *égouts* les deux plans ABEF, DCEF déterminés par la ligne de faîte et par les crêtes AB et DC des deux murs longitudinaux. Le comble qui supporte la toiture d'un tel bâtiment est dit *comble à deux égouts*.

Quand le bâtiment a peu de largeur, le comble n'est composé que de *chevrons*, c'est-à-dire que de pièces pq, $p'q'$,..., rq, $r'q'$,... placées suivant les lignes de plus grande pente des deux égouts et se correspondant deux à deux; deux chevrons correspondants comme pq et rq sont assemblés au point q par des entailles à mi-bois; la figure 114 est une perspective cavalière de l'un de ces chevrons. Les chevrons d'un même égout sont assemblés par embrèvement à leur partie inférieure r, r',... dans une pièce horizontale posée sur le mur longitudinal et à laquelle on donne le nom de *sablière;* il y a deux sablières, l'une en AB, l'autre en DC ; sous l'action du poids de la couverture les chevrons tendent à écarter les sablières et par suite à renverser les murs longitudinaux dans lesquelles ces pièces sont encastrées; on s'oppose à cet effet en reliant de distance en distance les deux sablières par des pièces de bois horizontales et parallèles à la droite DA qu'on nomme *tirants;* ces tirants, assemblés aux sablières au moyen d'entailles et de boulons, assurent l'invariabilité de l'écartement de ces deux pièces longitudinales. Pour plus de solidité, surtout lorsque la couverture doit être en tuiles et non en ardoises légères, on ajoute une pièce horizontale suivant la ligne de faîte EF ; les chevrons reposent sur cette pièce qu'on nomme *faîtage* et y sont attachés avec des broches de fer.

La figure 117 est une coupe pratiquée dans le bâtiment par un plan perpendiculaire à la ligne de faîte. On y voit le tirant A, les sablières B, les chevrons C, et le faîtage F. Pour remplir l'espace compris entre les sablières et les corniches des murs longitudinaux, on cloue sur les chevrons des morceaux de bois D, D analogues à des portions de chevron et qu'on nomme coyaux.

L'espacement des chevrons successifs varie entre $0^m,40$ et $0^m,65$, suivant la charge de la toiture. Sur l'ensemble des chevrons on cloue un *lattis* ou espèce de plancher auquel on adapte les ardoises.

102. Cette composition du comble ne suffit plus dès que la longueur des chevrons dépasse $2^m,50$; les chevrons fléchiraient, et chaque égout se creuserait. Il faut alors soutenir ces chevrons par des pièces placées par-dessous parallèlement au faîtage; ces pièces (fig. 116) TU, T'U' portent le nom de *pannes*, et elles sont à leur tour soutenues par des chevalets triangulaires MIN, M'I'N' appelés *fermes*, et que l'on distribue dans la longueur du bâtiment en les espaçant plus ou moins suivant la grosseur des pannes, et le poids qu'elles supportent.

La figure 113 est une coupe pratiquée dans un comble avec ferme par un plan perpendiculaire à la ligne de faîte. On y voit les sablières B, les chevrons C, les coyaux D, le faîtage F, et les pannes P. Au-dessous du système formé par les pièces susdites se trouve la ferme, qui est composée essentiellement d'un tirant A qui relie les sablières et qui est encastré par ses extrémités dans les deux murs, de *deux arbalétriers*, ou pièces inclinées *a* qui supportent les pannes et qui sont assemblées inférieurement dans le tirant et supérieurement dans une pièce verticale *p* nommée *poinçon*. Ce poinçon porte le faîtage et est relié par un étrier en fer au tirant qu'il empêche de fléchir et de se courber vers son milieu ; des *liens* ou contre-fiches *e*, assemblées d'une part dans le poinçon et de l'autre dans les arbalétriers juste au-dessous des pannes, empêchent les arbalétriers de se déformer sous le poids de ces pannes. Ajoutons enfin que les pannes sont maintenues sur les arbalétriers par de petits tasseaux ou chantignolles *t*, et que sur les *coyaux* D qui ne sont pas ordinairement prolongés jusqu'à l'extrémité de la corniche à cause de sa fragilité on cloue de petites planches *m* taillées en biseau et que l'on nomme *chanlattes*.

Les poinçons des fermes successives sont reliés au faîtage par des pièces en écharpe et qu'on nomme aisseliers ; l'ensemble de tous les poinçons des aisseliers et du faîtage est situé dans le plan vertical qui passe par le faîtage et prend le nom de *ferme sous faîte*.

Il ne faut pas se méprendre sur les rôles mutuels du tirant et du poinçon. Une pièce de bois n'offrant de résistance sérieuse que dans le sens de ses fibres, il faut que ce soit le poinçon qui soulève le tirant et non celui-ci qui supporte le poinçon. C'est en effet ce qui a lieu; l'action des deux arbalétriers qui s'arc-boutent sur le poinçon tend à soulever cette pièce, et le rôle du tirant consiste à empêcher les effets de la poussée au vide ; les deux composantes horizontales égales et contraires qui sont dirigées dans le sens de sa longueur et qui tendent à rejeter les murs au dehors se détruisent mutuellement par son intermédiaire.

Quant à la nature des assemblages, ceux des arbalétriers soit avec le poinçon, soit avec le tirant, sont à tenon et mortaise avec embrèvement; les contre-fiches s'assemblent à simple tenon dans les arbalétriers, et à tenon et embrèvement dans le poinçon.

La figure 115 montre la disposition du tirant A de la sablière B et des chevrons C.

103. Telle est la composition de la charpente d'un comble à deux égouts, dans les cas les plus simples et les plus ordinaires. Il existe un grand nombre de dispositions analogues et plus complexes; mais, quelle que soit la composition d'un pan de bois, c'est-à-dire d'un système de pièces dont les axes sont dans un même plan, il faut que la figure soit formée par un réseau de triangles, le triangle étant le seul polygone dont l'invariabilité soit assurée par cela même qu'on assigne la longueur des côtés.

Le lecteur nous saura gré de lui donner, en terminant, quelques renseignements numériques. Voici un petit tableau que nous empruntons au savant ouvrage du colonel Emy :

DIMENSIONS DES FERMES.			ÉQUARRISSAGE OU COTÉ DE LA SECTION DROITE SUPPOSÉE CARRÉE.					
Largeur.	Hauteur.	Écartement.	Tirant.	Arbalétrier.	Lien.	Poinçon.	Panne.	Chevron.
6m,50	3m,25	3m,25	0m,26	0m,20	0m,15	0m,19	0m,14	0m,11
8m	5m	3 ,60	0 ,29	0 ,22	0 ,18	0 ,21	0 ,14	0 ,11
10m	6m,50	4m	0 ,33	0 ,24	0 ,19	0 ,21	0 ,16	0 ,11

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Faire une perspective cavalière de l'ensemble de la plate-bande, représentée dans les figures 87 et 88.

2. Faire une perspective cavalière de la pièce B (fig. 95).

3. Faire une perspective cavalière de la pièce A (fig. 105).

4. Faire une perspective cavalière de l'ensemble de la ferme représentée dans la figure 113.

CHAPITRE VI

INTERSECTIONS DES DROITES ET DES PLANS

Objet de ce chapitre.

104. Toutes les questions relatives aux intersections des droites et des plans sont des combinaisons des trois problèmes suivants :

Intersection de deux droites ;

Intersection de deux plans ;

Intersection d'une droite et d'un plan.

Le premier de ces trois problèmes élémentaires a été complétement résolu au n° 35. Quant aux deux derniers, nous n'en avons encore étudié que les cas simples, c'est-à-dire les cas où l'intersection s'obtient immédiatement. Il nous reste donc à indiquer les méthodes générales qui permettent de résoudre les deux derniers problèmes dans tous les cas.

Toutefois, il importe de commencer par rappeler les cas simples que nous avons rencontrés, à cause du rôle qu'ils jouent dans la solution du cas général.

1° L'intersection d'une droite et d'un plan s'obtient immédiatement lorsque le plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 40).

2° L'intersection de deux plans s'obtient immédiatement lorsque l'un des plans est perpendiculaire à l'un des plans de projection (n° 68), et, en particulier, lorsque l'un des plans est horizontal, ou de front, ou perpendiculaire à la ligne de terre. Dans ce dernier cas, il convient, pour mettre l'intersection en évidence, de prendre ce plan perpendiculaire à la ligne de terre pour plan de projection auxiliaire.

105. L'intersection de deux plans s'obtient encore immédiatement (Pl. XIII, fig. 117), lorsque les deux plans $V_1\alpha_1H_1$, $V_2\alpha_2H_2$ sont donnés par leurs traces et que les traces de même nom $V_1\alpha_1$ et $V_2\alpha_2$, $H_1\alpha_1$ et $H_2\alpha_2$ se coupent en des points a et b' situés dans les limites de la feuille de dessin. En effet, le point a, appartenant à la fois au plan horizontal et aux deux plans donnés, est la trace horizontale de l'intersection de ces deux plans; de même le point b' est la trace verticale de la droite d'intersection; le problème actuel ne diffère donc pas au fond de celui du n° 43; (ab, ab') est la droite cherchée. — Si deux traces de même nom, les traces horizontales $H_1\alpha_1$, $H_2\alpha_2$ par exemple, étaient parallèles (fig. 118), les deux plans passant par deux droites parallèles se couperaient, d'après un théorème connu, suivant une parallèle à ces droites; l'intersection serait donc l'horizontale commune $(ab, a'b')$ dont la trace verticale est le point b'.

Méthode générale pour trouver l'intersection de deux plans.

106. Pour trouver l'intersection de deux plans quelconques, coupez-les par un plan auxiliaire choisi de façon que les droites suivant lesquelles il rencontre les deux plans proposés s'obtiennent aisément. Le point commun à ces deux droites appartiendra à l'intersection demandée. Un nouveau plan auxiliaire fournira un second point de la droite d'intersection qui sera ainsi déterminée sans ambiguïté.

Si l'on connaissait déjà un point ou la direction de l'intersection, on n'aurait plus qu'à chercher un point de cette droite; un seul plan auxiliaire suffirait donc.

La simplicité des tracés relatifs à l'intersection de deux plans est subordonnée aux choix des plans auxiliaires; on doit les prendre tels que la recherche de leur intersection avec chacun des plans proposés tombe dans l'un des cas simples signalés ci-dessus (nos 104 et 105). Voici quelques exemples remarquables.

Exemples relatifs à l'intersection de deux plans.

107. Et d'abord, revenons à l'épure 117 de la planche XIII. Nous avons exposé directement la solution de ce cas simple; mais on peut aussi voir dans ce tracé une application de la méthode générale. Les deux plans auxiliaires employés sont les plans de projection; le plan horizontal coupe les plans proposés suivant les droites $H_1\alpha_1$, $H_2\alpha_2$ dont le point commun (a, a') appartient à l'intersection demandée; le plan vertical donne de même le point (b, b').

Dans l'épure 118, on connaissait *à priori* la direction de l'intersection, il a donc suffi de couper par le plan vertical qui a donné le point (b, b') par lequel on a mené la parallèle $(ab, a'b')$ à la direction connue $H_1\alpha_1$ ou $H_2\alpha_2$.

108. Il peut arriver que deux traces de même nom $V_1\alpha_1$, $V_2\alpha_2$ (fig. 119) se coupent en un point (b, b') situé dans les limites de la feuille de dessin, tandis que les deux autres traces $H_1\alpha_1$. $H_2\alpha_2$, quoique non parallèles entre elles, ont leur point commun inaccessible. On emploie alors un plan auxiliaire, par exemple le plan de front xy, et le point de rencontre (m, m') des deux lignes de front obtenues achève de déterminer l'intersection $(bm, b'm')$.

D'autres fois (fig. 120) le point de concours des traces verticales $V_1\alpha_1$, $V_2\alpha_2$ est inaccessible aussi bien que celui des traces horizontales $H_1\alpha_1$, $H_2\alpha_2$. Pour obtenir l'intersection des deux plans $V_1\alpha_1H_1$, $V_2\alpha_2H_2$, le mieux est alors de recourir à une réduction d'échelle, c'est-à-dire de former une figure homothétique de la question proposée, en prenant pour centre d'homothétie le point α_2 et pour rapport d'homothétie

$$\frac{\alpha_2\alpha}{\alpha_2\alpha_1},$$

α étant un point de LT choisi de façon que les parallèles αV, αH à α_1V_1, α_1H_1 coupent respectivement α_2V_2, α_2H_2 dans les limites de la feuille. On cherche (105) l'intersection $(dc, d'c')$ des deux plans $V\alpha H$, $V_2\alpha_2H_2$; et comme l'intersection demandée est l'*homologue* de cette droite, il suffit de mener des parallèles $\delta'\gamma'$ et $\gamma\delta$ à $d'c'$ et à cd par les points δ' et γ, homologues de d' et de c. Tout revient donc à trouver graphiquement δ' et γ ; pour cela on mène par le point α_2 une droite quelconque $\alpha m\mu$ qui coupe αH et α_1H_1 en m et μ, et par μ on mène $\mu\delta'$ et $\mu\gamma$ respectivement parallèles à md' et à mc. On a, en effet :

$$\frac{\alpha_2\gamma}{\alpha_2c} = \frac{\alpha_2m}{\alpha_2\mu} = \frac{\alpha_2\alpha}{\alpha_2\alpha_1} \text{ et } \frac{\alpha_2\delta'}{\alpha_1d'} = \frac{\alpha_2m}{\alpha_2\mu} = \frac{\alpha_2\alpha}{\alpha_2\alpha_1},$$

ce qui prouve que γ et c, δ' et d' sont homologues.

109. Supposons actuellement les deux plans définis chacun par deux droites ; tels sont les deux plans $(bac, b'a'c')$, $(cde, c'd'e')$ de la figure 121.

Nous prendrons pour premier plan auxiliaire le plan qui projette verticalement la droite $(ab, a'b')$; il coupe le second plan $(cde, c'd'e')$ suivant la droite $(12, 1'2')$ qui par sa rencontre avec $(ab, a'b')$ donne un premier point (m, m') de l'intersection.

Nous avons pris pour second plan auxiliaire le plan qui projette horizontalement la droite $(ac, a'c')$; il coupe le plan

$(cde, c'd'e')$ suivant la droite $(34, 3'4')$ qui par sa rencontre avec $(ae, a'e')$ fournit un second point (n, n') de l'intersection. Cette intersection est donc $(mn, m'n')$.

110. Nous avons déjà donné au nº 108 un exemple de l'emploi d'un plan de front. La figure 125 (Pl. XIV) en offre un autre. Il s'agit de deux plans donnés, l'un $V\alpha H$ par ses traces, l'autre par la ligne de terre et un point (a, a'). Le point α de la ligne de terre est un point commun aux deux plans, nous en avons obtenu un deuxième en coupant par le plan de front apq qui passe par le point (a, a'). Ce plan de front coupe le plan $V\alpha H$ suivant la ligre de front $(pq, p'q')$ et le second plan suivant la parallèle à LT menée par le point (a, a'); les deux droites $(pq, p'q')$, $(aq, a'q')$, se rencontrent en (q, q'), et l'intersection cherchée est $(\alpha q, \alpha q')$.

111. Citons un exemple de l'emploi de plans auxiliaires horizontaux, et, pour prendre un cas intéressant et pratique, supposons que les deux plans donnés (fig. 122, Pl. XIII) soient définis par les traces horizontales α_1H_1, α_2H_2 et par l'inclinaison de chacun d'eux sur le plan horizontal.

Prenons pour plan vertical de projection un plan L_1T_1 perpendiculaire à α_1H_1, et faisons un angle $T_1\alpha_1V_1$ égal à l'inclinaison du premier plan sur le plan horizontal; la droite α_1V_1 sera la trace verticale de ce premier plan.

Opérons de même pour le second; soient L_2T_2 une deuxième ligne de terre perpendiculaire à α_2H_2, et α_2V_2 la trace du second plan sur le nouveau plan vertical L_2T_2.

Les deux plans seront alors définis par leurs traces horizontales α_1H_1, α_2H_2 et par leurs traces verticales α_1V_1, α_2V_2 sur deux plans verticaux différents. C'est un cas qui se présente assez fréquemment dans la coupe des pierres où l'on emploie souvent à la fois, pour représenter une portion d'édifice, trois dessins, un *plan* ou projection horizontale, et deux élévations, l'une latérale, l'autre longitudinale, qui sont en somme des projections sur des plans parallèles aux faces verticales principales de l'édifice.

Cela posé, pour trouver l'intersection, on coupe par un plan horizontal dont on prend à volonté la hauteur. En portant cette hauteur en $\alpha_1 h'$ et menant $h'k'$ parallèle à L_1T_1, on a, sur le premier plan vertical, la trace du plan auxiliaire, et, par suite, l'horizontale $(m', \mu_1 g_1)$ suivant laquelle ce plan auxiliaire coupe le plan $V_1\alpha_1H_1$. En portant la même hauteur en $\alpha_2 h''$, et menant $h''k''$ parallèle à L_2T_2, on obtient de même l'horizontale $(m'', \mu_2 g_2)$ du plan $V_2\alpha_2H_2$. Ces deux horizontales se coupent au point m, dont la cote est $\mu_1 m'$ ou $\mu_2 m''$, et en joignant ce point au point n où se rencontrent les traces horizontales, on a l'intersection demandée $(mn, m'\alpha_1)$ ou $(mn, m''\alpha_2)$.

112. La figure 123 (Pl. XIV) offre un exemple de l'emploi d'un plan auxiliaire perpendiculaire à LT.

Il s'agit ici de deux plans (V, H) (V_1, H_1) parallèles à la ligne de terre. Leur intersection est évidemment parallèle à cette ligne, et il suffit d'en trouver un point ; c'est pourquoi on a coupé par un plan L_1T_1 perpendiculaire à LT et que l'on a pris pour nouveau plan vertical. L'intersection m_1 des nouvelles traces verticales (n° 86) pq_1, rs_1 des deux plans proposés est le point demandé, et il n'y a plus qu'à prendre les projections m et m' de ce point sur le plan horizontal et sur le plan vertical primitif et à mener par m et m' des parallèles ab, $a'b'$ à la ligne de terre.

Il pourrait arriver que les lignes pq_1, rs_1 fussent parallèles, auquel cas l'intersection des plans proposés serait rejetée à l'infini. Pour que cette circonstance se présente, il faut qu'on ait :

$$\frac{op}{or} = \frac{oq_1}{os_1} = \frac{oq'}{os'}.$$

Ainsi, *pour que deux plans parallèles à la ligne de terre soient parallèles, il faut et il suffit que le rapport des dis-*

tances de la ligne de terre aux traces horizontales soit égal au rapport des distances de la ligne de terre aux traces verticales. Mais, quand deux plans coupent la ligne de terre, il suffit, pour qu'ils soient parallèles, que leurs traces soient respectivement parallèles, puisque deux angles qui ont leurs côtés parallèles ont leurs plans parallèles.

113. Enfin la figure 124 est relative à l'emploi, comme plan auxiliaire, d'un plan quelconque donné par ses traces.

Les deux plans $V\alpha H$, $V_1\alpha_1 H_1$ dont on demande l'intersection sont donnés par leurs traces qui partent d'un même point α de la ligne de terre. Ce point fait partie de l'intersection dont il ne reste plus qu'à trouver un second point. A cet effet, on a coupé les deux plans par le plan $v\beta h$. On trouve ainsi (n° 105) les deux droites $(ps, p's')$, $(rq, r'q')$, et en joignant leur point commun (m, m') au point α, on a l'intersection demandée $(\alpha m a, \alpha' m' a')$.

On pourrait multiplier beaucoup le nombre des exemples; mais ceux qui précèdent suffiront pour guider le lecteur dans la manière de choisir et d'employer les plans auxiliaires. Nous devons toutefois faire une observation importante : dans les numéros qui précèdent nous avons adopté les plans auxiliaires qui nous ont paru convenir le mieux, d'une manière générale, aux cas considérés; mais il peut se présenter telle disposition de la figure où le choix que nous avons fait serait défectueux. Un bon opérateur doit toujours chercher à obtenir les points par la rencontre de deux droites dont l'angle ne soit pas trop aigu, à déterminer une droite par deux points suffisamment éloignés l'un de l'autre, à économiser les lignes en utilisant les tracés antérieurs, etc., etc.

Méthode générale pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan.

114. Pour trouver l'intersection d'une droite et d'un plan, cherchez le point où la droite rencontre la ligne suivant laquelle le plan proposé est coupé par un plan auxiliaire mené par la droite.

Ce problème n'est donc au fond que la combinaison de deux questions déjà résolues : intersection de deux plans, intersection de deux droites.

Il convient de choisir le plan auxiliaire que l'on mène par la droite de façon que la recherche de son intersection avec le plan proposé tombe dans l'un des cas simples de l'intersection de deux plans. C'est pourquoi on prend le plus souvent pour plan auxiliaire l'un des plans projetants de la droite.

115. Quand on prend pour plan auxiliaire le plan vertical (*) passant par la droite, on peut effectuer les tracés, soit en conservant les deux plans de projection primitifs, soit en employant comme plans de projection le plan horizontal primitif et le plan vertical auxiliaire.

De là, deux manières de mettre en œuvre la solution; il convient surtout d'employer le second mode dans les deux cas suivants :

1° Lorsque la droite est située dans un plan perpendiculaire à la ligne de terre ;

2° Lorsque la droite et le plan proposé sont perpendiculaires entre eux.

Voici des exemples.

Exemples de l'intersection d'une droite et d'un plan.

116. Dans la figure 127 (Pl. XIV), il s'agit de trouver la rencontre de la droite (ab, $a'b'$) avec le plan VαH donné par ses traces.

Nous avons pris pour plan auxiliaire le plan aqq' qui projette la droite sur le plan horizontal, et nous avons

(*) Une observation analogue s'applique au cas où l'on choisit pour plan auxiliaire le plan qui projette la droite sur le plan vertical.

suivi la première manière (n° 115) ; $(pq, p'q')$ est l'intersection du plan auxiliaire et du plan proposé, et le point (m', m) commun à cette droite et à la droite donnée est le point cherché.

117. Dans la figure 126, relative à l'intersection d'une droite $(de, d'e')$ et d'un plan $(bac, b'a'c')$ donné par deux droites, nous avons encore suivi la première manière, mais en prenant pour plan auxiliaire le plan $d'e'$ qui projette la droite donnée sur le plan vertical. On trouve $(p'q', pq)$ pour l'intersection des deux plans et (m, m') pour le point commun à $(pq, p'q')$ et à $(de, d'e')$, c'est-à-dire pour le point demandé.

118. Dans la figure 128, nous avons conservé les données précédentes, c'est-à-dire une droite quelconque $(de, d'e')$ et un plan $(bac, b'a'c')$ donné par deux droites. Mais nous avons pris pour plan auxiliaire le plan qui projette la droite sur le plan horizontal, et nous avons suivi le second mode ; en d'autres termes, nous avons effectué les tracés en prenant le plan auxiliaire de ou L_1T_1, pour plan vertical de projection.

On commence par déterminer la trace $p''q''$ du plan $(bac, b'a'c')$ sur le nouveau plan vertical (n° 78), puis la nouvelle projection verticale dq''_1 de la droite; cela fait, le point commun m'' à dq_1'' et à $p''q''$ est la nouvelle projection verticale du point demandé ; sa projection horizontale m s'obtient en menant la perpendiculaire $m''m$ à L_1T_1, et sa projection m' sur le plan vertical primitif est à la rencontre de $d'e'$ et de la ligne de rappel du point m.

Si l'on avait à chercher l'intersection du même plan $(bac, b'a'c')$ avec plusieurs droites parallèles $(de, d'e')$, les droites analogues à $p''q''$ et à dq''_1 seraient parallèles à celles-ci, et leur détermination n'exigerait plus que la construction d'un point de chacune d'elles.

119. Supposons que la droite soit perpendiculaire à la ligne de terre et donnée par deux de ses points (a, a'), (b, b')

(fig. 129) ; le plan sera donné, par exemple, par ses traces $\alpha V, \alpha H$.

On prend ici pour plan auxiliaire le plan perpendiculaire à la ligne de terre qui contient la droite, et l'on adopte ce plan pour nouveau plan vertical; l'intersection m'' de la nouvelle trace verticale pq'' du plan et de la nouvelle projection verticale $a''b''$ de la droite donne le point cherché m'', dont on trouve immédiatement la représentation (m, m') sur les plans coordonnés primitifs.

120. Enfin la figure 130 est relative à l'intersection d'une droite quelconque $(de, d'e')$ et d'un plan perpendiculaire à cette droite; la connaissance d'un seul point (o, o') de ce plan suffit alors pour le déterminer.

On prend pour plan auxiliaire le plan *de* qui projette la droite sur le plan horizontal, et on adopte ce plan pour nouveau plan vertical de projection ; o'' étant la nouvelle projection verticale du point (o, o') et do_1'' la nouvelle projection verticale de la droite, on abaisse de o'' la perpendiculaire $o''g''$ sur do''_1 ; cette perpendiculaire représente la trace du plan sur le plan vertical L_1T_1, car cette trace doit être à angle droit sur la projection do''_1 de la droite, et elle doit d'ailleurs passer par o'', puisque ce plan est perpendiculaire au plan vertical L_1T_1 (n° 3); le point cherché est donc le point m'', dont la représentation sur les anciens plans coordonnés est (m, m').

On voit d'ailleurs que, sur la projection auxiliaire, la droite $dm''o''_1$ se trouve en vraie grandeur ; en sorte que ce procédé donne, en même temps que le point d'intersection, *la distance d'un point quelconque de la droite au plan ;* ainsi, la distance du point (d, d') au plan est dm''.

Intersection de trois plans.

121. Pour trouver le point commun à trois plans, on cherche le point où se coupent les droites suivant lesquelles l'un de ces plans rencontre les deux autres, ou encore le point où la droite commune à deux des plans proposés rencontre le troisième.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Trouver l'intersection de deux plans dont les traces sont en ligne droite.

2. Trouver l'intersection de deux plans dont les traces sont en ligne droite et coupent la ligne de terre au même point.

3. Trouver les points où une droite rencontre les plans bissecteurs des angles formés par les plans coordonnés.

4. Trouver la droite d'intersection d'un plan donné par trois points et des plans bissecteurs des angles formés par ces plans coordonnés.

5. Trouver l'intersection d'une droite et d'un plan passant par la ligne de terre et un point donné.

6. Trouver l'intersection de deux plans donnés par leurs lignes de plus grande pente. — Examiner le cas où les projections horizontales des deux lignes de plus grande pente sont parallèles.

7. On donne dans le plan horizontal un quadrilatère qui est la projection d'un pentagone ABCDE dont un côté DE est vertical. Connaissant les cotes des sommets du pentagone, représenter en projection horizontale le tétraèdre compris entre les quatre plans qui auraient respectivement pour lignes de plus grande pente, AB, BC, CD, EA.

CHAPITRE VII

RABATTEMENTS ET ROTATIONS.

Objet de la méthode des rabattements.

122. La méthode des rabattements permet de trouver la vraie grandeur des figures planes. Elle sert encore à résoudre tout problème qui ne relève que de la géométrie plane, c'est-à-dire dont la solution n'exige que l'intervention de lignes toutes situées dans un même plan ; telles sont, par exemple, les questions suivantes : construire la bissectrice d'un angle, trouver la distance d'un point à une droite, tracer les projections d'une circonférence dont on donne trois points, etc.

Pour trouver la vraie grandeur d'une figure plane, on fait tourner le plan de cette figure autour d'une de ses horizontales, jusqu'à ce qu'il soit devenu horizontal ; arrivée dans cette position, la figure se projette horizontalement en vraie grandeur.

Lorsqu'un problème ne dépend que de la géométrie plane, on rend horizontal le plan qui doit contenir toutes les lignes de construction, en le faisant tourner, avec les données qu'il renferme, autour de l'une de ses horizontales. On effectue alors les tracés nécessaires pour la solution du problème ; puis, par un mouvement inverse, on ramène le plan à sa position primitive en entraînant les éléments qu'on a déterminés.

Souvent l'horizontale choisie pour axe de rotation est la trace horizontale du plan, lequel vient alors s'appliquer ou se rabattre sur le plan horizontal ; de là le nom de *rabattement* donné à la méthode que nous venons de définir. Nous conserverons encore cette dénomination, lorsque l'axe choisi est une horizontale quelconque du plan ; nous dirons dans ce cas qu'on a *rabattu le plan autour d'une horizontale.*

Au lieu d'une horizontale, on peut employer une ligne de front du plan et faire tourner ce plan autour de cette ligne jusqu'à ce qu'il soit parallèle au plan vertical de projection. Si la ligne de front employée est la trace verticale du plan, le plan vient alors s'appliquer sur le plan vertical lui-même. On dit encore ici qu'on a *rabattu* le plan donné sur le plan vertical soit autour de la trace verticale, soit autour d'une ligne de front.

Rabattement d'un plan autour de sa trace horizontale.

123. Les figures 131 et 132 de la planche XV sont relatives au rabattement d'un plan autour de sa trace horizontale. La figure 131 est une perspective destinée à faire comprendre les tracés de l'épure 132.

Quand le plan P (fig. 131) vient, en tournant autour de sa trace horizontale XY, s'appliquer sur la partie H du plan horizontal, la ligne de plus grande pente MO d'un point quelconque M de ce plan conserve, pendant la rotation, sa longueur MO et reste perpendiculaire à XY. Donc, après le rabattement, le point M vient sur la perpendiculaire OM_1 menée par O sur XY dans le plan horizontal, à une distance OM_1 égale à MO. Ainsi tout se réduit à trouver la position de la perpendiculaire OM_1 et la longueur de MO. Or, en vertu du théorème des trois perpendiculaires, la droite OM_1 est le prolongement de la perpendiculaire abaissée sur XY par la projection horizontale m du point M ; et, quant à la longueur OM, nous avons appris à la construire au n° 45; il suffit pour cela de rabattre, autour de Om, le triangle rectangle et vertical MOm, dont on a deux côtés de l'angle droit, à savoir l'un Om qui est directement sur l'épure, et l'autre mM qui n'est autre que la cote du point M.

Après ces explications, la lecture de l'épure 132 ne saurait offrir aucune difficulté. Nous allons cependant reprendre le raisonnement, car les élèves doivent savoir expliquer cette question au fur et à mesure qu'ils font l'épure et sans le secours de la figure 131.

Soit donc à rabattre autour de sa trace horizontale xy (fig. 132) un plan défini par cette trace et par un point (m, m'). La perpendiculaire mo abaissée de m sur xy est la projection horizontale de la portion Mo de la ligne de plus grande pente comprise entre le point M et l'axe xy. Dans le mouvement, cette droite Mo reste perpendiculaire à xy et conserve sa longueur ; après le rabattement, elle vient donc en oM_1 sur le prolongement de mo, et il suffit, pour avoir M_1 de connaître la vraie grandeur de Mo ; or on sait (n° 45) que c'est l'hypoténuse d'un triangle rectangle mom'', ayant pour côtés de l'angle droit mo et la cote $\mu m'$ du point ; on aura donc le rabattement M_1 du point M en décrivant du point o comme centre et avec om'' pour rayon un arc de cercle jusqu'à sa rencontre avec mo prolongée.

La règle pratique est donc la suivante :

Pour rabattre un point, menez, par la projection horizontale de ce point, une perpendiculaire et une parallèle à l'axe de rotation; portez sur la parallèle la cote du point ; du pied de la perpendiculaire, décrivez un arc de cercle passant par l'extrémité de la parallèle et arrêtez cet arc à sa rencontre avec la perpendiculaire prolongée.

Il importe de se familiariser avec ce tracé par de nombreux exercices, jusqu'à ce qu'on soit en état de l'exécuter très-rapidement et sans la moindre hésitation.

124. L'angle $m''om$ est l'angle de la ligne de plus grande pente avec le plan horizontal ou, ce qui revient au même, l'inclinaison du plan sur le plan horizontal. Il résulte de là que, pour tous les points du même plan, les triangles analogues à mom'' ont leurs côtés homologues parallèles; on peut en dire autant des triangles isocèles analogues à $m''o\mathrm{M}_1$. Cette considération facilite le rabattement des divers points du plan, dès qu'on a rabattu l'un d'eux.

Ainsi, supposons qu'on veuille rabattre un second point du plan, par exemple celui qui a le point n pour projection horizontale. On mènera par n la perpendiculaire ni et la parallèle nn'' à xy, et par i la parallèle in'' à om''; puis on achèvera soit en décrivant de i comme centre l'arc de cercle $n''\mathrm{N}_1$, soit en menant $n''\mathrm{N}_1$ parallèle à $m''\mathrm{M}_1$.

125. Pour relever un point, on exécute les mêmes constructions dans l'ordre inverse.

Soit N_1 le rabattement d'un point du plan dont on veut trouver les projections, il faut, avant tout, se procurer la direction om'', si on ne l'a déjà; il suffira pour cela de déterminer préalablement l'angle du plan avec le plan horizontal, ou mieux, de rabattre un premier point du plan, parce qu'alors on aura en outre à sa disposition la direction M_1m''. — Cela étant, on mènera par N_1 la perpendiculaire N_1i sur xy, et par i la parallèle à om'', jusqu'à sa rencontre n'', soit avec l'arc décrit de i pour centre avec N_1i pour rayon, soit avec la parallèle à M_1m'' menée par N_1; en projetant n'' sur N_1i prolongée, on aura en n la projection horizontale du point et en nn'' sa cote qui, portée en $\nu n'$ sur la ligne de rappel de n, donnera la projection verticale n'.

126. Pour rabattre ou relever une droite d'un plan, on rabat ou on relève deux points de cette droite. On doit choisir de préférence les points où la droite rencontre certaines droites déjà relevées ou rabattues, attendu qu'il suffit, pour rabattre ou relever ces points, de mener des perpendiculaires à l'axe. En particulier, le point où la droite considérée rencontre l'axe doit toujours être utilisé s'il est dans les limites de la feuille, puisque ce point reste immobile.

Quand on a à relever ou à rabattre une figure plane un peu compliquée, il est souvent avantageux de rabattre une ou deux droites auxiliaires qui rencontrent la figure en un grand nombre de points; le mieux est de choisir des horizontales ou des lignes de front, la trace verticale du plan par exemple, si elle se trouve dans l'intérieur du cadre.

Rabattement autour d'une horizontale ou d'une ligne de front.

127. La figure 133 se rapporte au rabattement autour d'une horizontale. Le plan est défini par cette horizontale $(xy, x'y')$ et par le point (m, m').

On ramène ce cas au précédent en supposant qu'avant de rabattre on ait abaissé le plan d'une hauteur égale à la cote $x'x$ de l'horizontale, de façon que chaque point du plan suive sa verticale ; l'axe vient aussi coïncider avec xy dans le plan horizontal, et les constructions sont les mêmes qu'au n° 123, à cela près que la cote de chaque point doit être diminuée de xx', c'est-à-dire doit être comptée à partir de $x'y'$, et non à partir de LT. Ainsi il faudra prendre mm'' égale à la cote *réduite* $\mu_1 m'$.

De même, en relevant un point N_1, dès qu'on aura trouvé la projection horizontale n, il faudra, pour obtenir la projection verticale correspondante n', se rappeler que la droite nn'' n'est pas la cote véritable, mais bien la cote *réduite*, c'est-à-dire la cote véritable diminuée de xx' ; on portera donc cette cote réduite nm'' sur la ligne de rappel $n\nu$, à partir de $x'y'$, en $\nu_1 n'$.

Ainsi, en résumé, *pour rabattre autour d'une horizontale* *la règle est la même que celle du n°* 123, *à condition de substituer aux cotes véritables les* COTES RÉDUITES, c'est-à-dire les cotes comptées à partir de l'horizontale.

128. La figure 134 est relative au rabattement sur le plan vertical autour d'une ligne de front (ef, $e'f'$); le plan à rabattre est défini par cette ligne de front et par le point (m, m').

Les tracés sont encore les mêmes; seulement le rôle des plans de projection est interverti; les éloignements remplacent les cotes, et on doit les compter, non à partir de LT, mais à partir de ef. Ainsi, pour rabattre le point (m, m'), par m', on mène à $e'f'$ une perpendiculaire $m'o'$ et une parallèle $m'm''$ que l'on prend égale à *l'éloignement réduit* $\mu_1 m$; puis, du point o' comme centre avec $o'm''$ pour rayon, on décrit un cercle jusqu'à la rencontre de $m'o'$ prolongée; le point M_1, ainsi obtenu, est le rabattement demandé.

Le relèvement exige les mêmes constructions exécutées en ordre inverse; l'opération est faite sur la figure pour le point N_1 qui devient (n, n').

Autre solution graphique du problème des rabattements.

129. Pour rabattre autour d'une horizontale, au lieu de faire intervenir la ligne de plus grande pente, il est parfois plus commode de se servir de la ligne de front qui passe par le point (m, m') (fig. 133).

Soit (mp, $m'p'$) cette ligne de front; dans le mouvement le point (p, p') où elle rencontre l'axe XY ne bouge pas, et sa longueur reste la même. D'ailleurs cette longueur, qu'on a ici en $m'p'$, se projette horizontalement en vraie grandeur lorsque le plan est devenu parallèle au plan horizontal. Donc, si du point p comme centre avec $m'p'$ pour rayon on décrit un arc de cercle, le point où cet arc rencontrera la perpendiculaire mo abaissée de m sur xy sera le rabattement M_1 demandé.

Comme les triangles analogues à mpM_1 ont leurs côtés homologues parallèles, rien ne sera plus simple que de rabattre d'autres points ou de les relever. — Pour rabattre le point du plan projeté en n, on mènera ni parallèle à mM_1, nq parallèle à mp, et qN_1 parallèle à pM_1 ; le rabattement demandé N_1 sera à la rencontre de qN_1 et de nN_1. — Pour relever un point tel que N_1, on mènera N_1n parallèle à M_1m, N_1q parallèle à M_1p, et qn parallèle à pm; le point n commun à qn et à N_1n sera la projection horizontale du point qui était rabattu en N_1; sa projection verticale n' s'obtiendra en décrivant du point q' comme centre, avec un rayon égal à qN_1, un arc de cercle jusqu'à sa rencontre avec la ligne de rappel du point n.

Nous avons appliqué le même tracé dans la figure 132; on le voit aussi sur la figure 134 ; mais dans ce dernier cas c'est une horizontale (mp, $m'p'$) qui joue le rôle que remplissait dans l'alinéa précédent une ligne de front.

Dans la pratique, le choix entre ce nouveau tracé et l'ancien dépend des constructions qui précèdent et de celles qui doivent suivre l'opération du rabattement. Économiser les lignes, rejeter celles qui se croisent sous un angle trop aigu, éviter de trop surcharger certaines parties de la feuille de dessin, etc., tels sont les principes qui doivent guider dans le choix entre deux tracés qui conduisent au même résultat.

Objet de la méthode des rotations.

150. En géométrie descriptive, les difficultés de construction tiennent souvent à la mauvaise disposition de la figure par rapport aux plans coordonnés ; et, dans la plupart des cas, il existe une position particulière des données qui facilite singulièrement la solution du problème.

Par exemple, la distance de deux points se projette en vraie grandeur sur le plan vertical, quand la droite qui joint ces deux points est une droite de front. Aussi, pour résoudre ce problème, avons-nous au n° 45 fait une projection auxiliaire sur le plan vertical qui contient la droite. Mais, au lieu de changer de plan vertical, on aurait pu laisser les plans coordonnés immobiles et faire tourner la droite autour d'un axe vertical de façon à la rendre parallèle au plan vertical de projection.

On voit ainsi s'offrir naturellement la question suivante: *Étant données les projections d'une figure sur deux plans coordonnés rectangulaires, trouver les projections de cette figure après qu'elle a tourné d'un angle donné autour d'un certain axe.*

On donne ainsi à la figure ou à l'une de ses parties une position qui facilite l'exécution des tracés ; puis on ramène le tout à la position primitive par un mouvement inverse. C'est en cela que consiste la *méthode des rotations*.

Dans la pratique, on n'emploie utilement que des axes perpendiculaires ou parallèles à l'un des plans coordonnés.

D'ailleurs le cas d'un axe parallèle à l'un des plans coordonnés se ramène au cas où l'axe est perpendiculaire à l'autre plan de projection, en faisant préalablement une projection auxiliaire de la figure sur un plan perpendiculaire à l'axe, ce qui n'offre aucune difficulté. Nous nous bornerons donc ici à traiter la question des rotations autour d'un axe vertical ou perpendiculaire au plan vertical.

151. La solution du problème des rotations est fondée sur le principe suivant :

Quand une figure tourne autour d'un axe, tout point de cette figure décrit un arc de cercle dont le centre est sur l'axe et dont le plan est perpendiculaire à l'axe. Pour deux points quelconques de la figure, l'angle de rotation est le même, mais *les arcs décrits sont proportionnels aux distances respectives de ces points à l'axe.*

Rotation d'un point.

132. Supposons l'axe $(o, o'o'')$ vertical (Pl. XV, fig. 135) et soit (m, m') le point qui doit tourner d'un angle donné ω dans le sens de la flèche f. Ici l'arc décrit par le point M est horizontal ; il se projette donc verticalement sur la parallèle $m'h'$ à la ligne de terre et horizontalement en vraie grandeur ; de plus, le centre de cet arc étant sur l'axe, le centre de sa projection horizontale est le point o. D'après cela, du point o comme centre, avec om pour rayon, on décrira dans le sens de la flèche f un arc mm_1, tel que l'angle mom_1 soit égal à l'angle donné ω ; le point m_1 sera la projection horizontale du point M après la rotation ; on aura ensuite la projection verticale m'_1 en reportant m_1 sur $h'm'$ à l'aide d'une ligne de rappel.

133. On opérerait d'une manière analogue si l'axe (oo_1, o') était perpendiculaire au plan vertical (fig. 136). Dans cette figure, au lieu de donner l'angle de rotation ω, nous avons supposé qu'on voulait faire tourner le point (m, m') pour l'amener dans un plan donné VαH. Le point M restant toujours dans le plan de front mk se trouvera finalement sur la ligne de front $(kl, k'l')$ du plan donné. On décrit donc du point o' comme centre avec $o'm'$ pour rayon un arc de cercle jusqu'à sa rencontre m'_1 avec $l'k'$; m'_1 sera la projection verticale du point M après la rotation, et la ligne de rappel du point m'_1 donnera par son intersection avec lk la projection horizontale m_1.

Rotation d'une droite.

134. Pour faire tourner une droite autour d'un axe, on fait tourner deux points pris à volonté sur la droite. Le plus souvent, pour simplifier les tracés, on choisit, soit deux points équidistants de l'axe, soit le point le plus voisin de l'axe et un autre point quelconque. La figure 137 est relative à la première manière d'opérer, la figure 138 à la seconde; dans les deux cas on a supposé l'axe $(o, o'o'')$ vertical.

Dans la figure 137 on a commencé par décrire un cercle de rayon arbitraire et dont le centre est o ; ce cercle coupe la projection horizontale de la droite $(cd, c'd')$ en deux points a et b dont on obtient les projections verticales a' et b' par des lignes de rappel. Les deux points (a, a') (b, b') sont équidistants de l'axe, et les arcs qu'ils décrivent se projettent horizontalement sur le même cercle bb_1 aa_1. Après avoir tourné de l'angle donné ω, (a, a') vient en (a_1, a'_1), (b, b'_1) en (b_1, b'_1), et la droite donnée prend la position $(a_1b_1, a'_1b'_1)$. Comme vérification, les cordes ab, a_1b_1 doivent être égales.

Pour que le lecteur se rende bien compte de l'épure 138, nous observerons d'abord que, si des divers points de la droite AB on conçoit des perpendiculaires à l'axe, ces perpendiculaires se projettent sur le plan horizontal en vraie grandeur, suivant les droites qui joignent le point o aux divers points de ab; on aura donc le point de AB, qui est le plus voisin de l'axe, en abaissant du point o la perpendiculaire oa sur ab. Après la rotation, ce point (a, a') est venu en (a_1, a'_1) ; d'ailleurs, dans sa nouvelle position, la droite étant encore à angle droit sur le rayon horizontal $(oa_1, o'''a'_1)$, sa projection a_1b_1 doit toucher en a_1 le cercle aa_1, et il ne reste plus qu'à trouver un second point de la projection verticale de la droite. A cet effet, on fait tourner un point quelconque (c, c') de cette droite, ce qui se fait alors très-simplement, si l'on observe que, pendant la rotation, la longueur de CA et son inclinaison sur le plan horizontal ne varient pas, de sorte que la projection horizontale de CA conserve sa longueur ; il suffira donc de prendre sur la tangente b_1a_1

une longueur a_1c_1 égale à ac et de même sens, pour avoir la projection finale c_1 du point C ; la projection verticale c'_1 s'en déduit à l'aide d'une ligne de rappel que l'on prolonge jusqu'à sa rencontre avec la parallèle à LT menée par c' ; $a'_1c'_1$ est la projection verticale de la droite après la rotation.

135. Il suffit de faire tourner un seul point de la droite toutes les fois que cette droite rencontre l'axe ou lui est parallèle ; car, dans le premier cas, le point de rencontre reste immobile, et, dans le second cas, la droite reste parallèle à l'axe.

136. Pour rendre une droite parallèle à l'un des plans de projection, il suffit de la faire tourner autour d'un axe perpendiculaire à l'autre plan, jusqu'à ce que sa projection sur ce second plan soit parallèle à la ligne de terre. Il est commode de faire passer l'axe par un point de la droite.

Rotation d'un plan.

137. Pour faire tourner un plan autour d'un axe, on fait tourner deux droites, ou trois points, ou une droite et un point de ce plan.

Dans l'épure (Pl. XVI, fig. 139) nous avons choisi la trace horizontale αH et le point $(o,\ o')$ où le plan VαH rencontre l'axe vertical $(o,\ o'''o'')$ autour duquel on propose de faire tourner le plan d'un angle donné ω dans le sens de la flèche f. La trace horizontale αH reste tangente au cercle qui a le point o pour centre ; elle devient α_1H_1, et comme le point (o, o') du plan reste immobile, le plan est après la rotation défini par sa trace horizontale α_1H_1 et par le point $(o,\ o')$. L'horizontale $(oq,\ o'q')$ du point $(o,\ o')$ donnera un point q' de la nouvelle trace verticale qui s'obtiendra en joignant q' à α_1.

138. Pour rendre un plan perpendiculaire à l'un des plans de projection, il suffit de le faire tourner autour d'un axe perpendiculaire à l'autre plan, jusqu'à ce que sa trace sur ce second plan soit perpendiculaire à la ligne de terre.

Remarques.

139. Nous nous sommes borné dans ce chapitre aux notions indispensables sur la question si étendue des rotations, dont les rabattements ne sont qu'un cas particulier. Nous ne saurions trop engager le lecteur qui voudra se familiariser avec ces théories fondamentales à exécuter, d'après les indications que nous avons données, l'épure des rotations autour d'un axe horizontal ou de front, puis à déduire, des tracés obtenus, celui que nous avons indiqué dans les pages qui précèdent pour les questions de rabattement. Les limites de notre programme ne nous permettent pas d'entrer dans tous ces développements, pour lesquels nous renverrons à notre *Traité de géométrie descriptive* à l'usage des élèves de mathématiques élémentaires et spéciales.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. On donne les projections horizontales de deux points d'un plan et la ligne de plus grande pente qui passe par l'un de ces points ; trouver les projections d'un hexagone régulier situé dans ce plan, et dont deux sommets consécutifs ont les deux points donnés pour projections horizontales.

2. Étant données les projections d'un triangle, trouver les projections du triangle qui aurait pour sommets les centres des trois cercles ex-inscrits au premier.

3. On donne les traces d'un plan qui sont distinctes l'une de l'autre, et à 45° sur la ligne de terre; par un point pris sur la trace horizontale et situé à $1^{m},35$ du point où cette trace rencontre la ligne de terre, mener dans le plan donné une droite telle que le triangle compris entre cette droite et les deux traces ait une surface de 1^{m} carré.

4. Rendre une droite donnée perpendiculaire à l'un des plans de projection à l'aide de deux rotations successives.

5. Rendre un plan parallèle à l'un des plans de projection à l'aide de deux rotations successives.

CHAPITRE VIII

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES ET AUX DISTANCES.

Problèmes relatifs aux angles.

140. — Les questions fondamentales relatives aux angles sont au nombre de trois :

1° Angle de deux droites ;

2° Angle d'une droite et d'un plan ;

3° Angle de deux plans.

On ramène immédiatement la seconde à la première en remarquant que l'angle d'une droite et d'un plan est le complément de l'angle que cette droite forme avec une perpendiculaire au plan. Il ne nous reste donc à traiter que le premier et le troisième problème.

Angle de deux droites.

141. Si les deux droites données n'étaient pas situées dans un même plan ou se coupaient hors des limites de l'épure, on mènerait par un point de l'une une parallèle à l'autre, et l'on serait ramené à chercher l'angle que cette parallèle fait avec la première droite.

On peut donc toujours supposer que les deux droites se rencontrent (et même que leur point commun est accessible), et il suffit alors, pour trouver leur angle, de rabattre le plan des deux droites autour d'une de ses horizontales ou d'une de ses lignes de front.

Dans la figure 140 (Pl. XVI), on a rabattu le plan de deux droites (oa, $o'a'$), (ob, ob') autour de l'horizontale (pq, $p'q'$). Les points (p,p'), (q,q') où les côtés de l'angle rencontrent l'horizontale ne changent pas, et il a suffi de rabattre le sommet (o, o'), lequel est venu en o_1; l'angle $po_1 q$ est l'angle cherché. Si l'on veut sa bissectrice, on mènera la bissectrice $o_1 m$ de l'angle rabattu et on la relèvera; comme le point m, où cette bissectrice rencontre l'horizontale (pq, $p'q'$), ne bouge pas, et que ce point a pour projection verticale m', les projections de la bissectrice seront om, $o'm'$.

Dans la figure 141 on a cherché l'angle de deux droites (oa, $o'a'$) (ob, $o'b'$), dont l'une est de front. C'est cette droite OB qu'on a choisie pour axe de rotation, et on a rabattu sur le plan vertical. Le sommet (o, o') de l'angle reste immobile, et il a suffi de rabattre un point (m, m') du côté (oa, $o'a'$). Ce point est venu en m_1 et $m_1 o'b'$ est l'angle demandé. — On déterminerait les projections de la bissectrice en traçant la bissectrice de l'angle rabattu, puis en relevant un point de cette droite.

142. Dans la figure 142 nous avons cherché l'*angle des traces* d'un plan VαH. C'est une application immédiate de la construction expliquée au n° 129 pour rabattre un point, connaissant la longueur de la ligne de front qui passe par ce point. En effectuant ce tracé pour un point (p_1 p') de la trace verticale αV du plan, nous avons obtenu le rabattement P_1 de ce point autour de αH; $P_1\alpha$ est donc le rabattement de la trace verticale, et $P_1\alpha$ H est l'angle demandé.

Angle de deux plans.

143. Pour trouver l'angle de deux plans, on cherche les droites suivant lesquelles ces plans sont coupés par un plan auxiliaire perpendiculaire à leur intersection ;

puis, on construit (n° 142) l'angle de ces deux droites.

Soient (fig. 143) aH_1 et aH_2 les traces horizontales des deux plans proposés et M un point de l'intersection donné par sa projection horizontale m et par sa cote. La droite am sera la projection horizontale de l'intersection, et, en lui menant une perpendiculaire bd, on aura la trace horizontale d'un plan perpendiculaire à l'intersection. Ce plan auxiliaire coupe les plans proposés suivant deux droites qui ont respectivement pour traces horizontales les points p_1 et p_2 où bd rencontre a H_1 et a H_2. Pour connaître complétement ces deux droites, il suffit d'avoir leur point commun, c'est-à-dire le point O, où le plan auxiliaire rencontre l'intersection des deux plans proposés; on obtient ce point par la méthode indiquée au n° 120; on prend pour ligne de terre la droite ab, sur laquelle on élève la perpendiculaire mm' égale à la cote donnée du point M; am' est la projection verticale de l'intersection des deux plans proposés. On abaisse du point b la perpendiculaire be' sur am'; c'est la trace verticale du plan auxiliaire dbe', et le point o', situé dans le plan vertical, à la rencontre de am' et de be' est le sommet de l'angle à construire. Pour avoir cet angle, il suffit (n° 141) de rabattre son plan autour de sa trace horizontale bd; les points p_1 et p_2 ne bougent pas, et on n'a qu'à rabattre le sommet o' à l'aide d'un arc de cercle $o'o_1$ ayant b pour centre et $b\,o'$ pour rayon. En joignant alors le point o_1 aux points p_1 et p_2, on a l'angle demandé $p_1o_1p_2$.

En somme, tout se réduit à trouver l'intersection d'une droite et d'un plan perpendiculaires et à chercher la nouvelle position que prend le point obtenu quand on rabat le plan ; c'est une intersection suivie d'un rabattement. Or, toutes les fois qu'on a deux tracés à exécuter successivement, il convient de les relier l'un à l'autre, c'est-à-dire d'exécuter le premier en vue du second, de manière à utiliser autant que possible dans le second les lignes employées dans le premier. C'est ce qu'on a fait ci-dessus, et il importe de bien s'en rendre compte ; car c'est par une judicieuse critique des tracés classiques qu'on acquiert cet art de combiner heureusement les constructions qui permet d'atteindre le but non par une suite inextricable de lignes, mais par une épure claire, élégante et facile. Dans l'exemple qui nous occupe, la simplicité de l'épure tient à ce que nous avons cherché l'intersection de la droite et du plan perpendiculaires en opérant, non comme au nº 116, mais conformément aux prescriptions du nº 120 ; de cette façon, tout se trouve parfaitement préparé pour le rabattement ultérieur, qui, n'étant plus que le rabattement d'un point du plan vertical autour d'une perpendiculaire à la ligne de terre, n'exige que le tracé d'un arc de cercle, sans même qu'il soit besoin de chercher la projection horizontale du point à rabattre.

Dans la figure 143, nous avons déterminé le *plan bissecteur* de l'angle des deux plans proposés. Après avoir tracé la bissectrice $o_1\,q$ de l'angle rabattu $p_1\,o_1\,p_2$, on observe que le point q, où cette bissectrice rencontre la trace bd du plan auxiliaire, ne change pas dans le relèvement ; ce point q est donc la trace horizontale de la bissectrice relevée, et comme tel il appartient à la trace horizontale du plan bissecteur, lequel est dès lors complétement déterminé par sa trace horizontale aq et le point M.

144. Pour familiariser le lecteur avec la méthode précédente, nous avons déterminé (fig. 144) l'angle dièdre suivant l'arête SA d'un tétraèdre SABC donné par ses deux projections.

En coupant les deux faces SAB, SAC par un même plan horizontal $a'h'_1h'_2$, nous avons obtenu les horizontales ah_1, ah_2 de ces deux plans. Dès lors, si l'on imagine que le tétraèdre soit abaissé verticalement d'une hauteur égale à la cote du point (a, a'), les droites $a\,h_1$, $a\,h_2$ deviennent les traces horizontales des deux plans ; a est la trace de leur intersection dont on connaît en outre un point par sa projection horizontale s et sa cote $\sigma s'$. On rentre donc ainsi dans les données du n° 143 et il suffit de répéter le tracé fait dans ce numéro. On prend as pour ligne de terre auxiliaire, on porte la cote $\sigma s'$ en ss'_1, et as'_1 est la nouvelle projection verticale de l'intersection des deux plans; d'un point k de $L_1 T_1$ on mène la perpendiculaire kb à as et la perpendiculaire ko'_1 à as'_1; ce sont la trace horizontale et la trace sur le plan vertical $L_1 T_1$ d'un plan auxiliaire perpendiculaire à l'intersection. En rabattant o'_1 sur $L_1 T_1$ à l'aide d'un arc de cercle $o'_1 o_2$ ayant k pour centre, et joignant o_2 aux points p_1 et p_2 où kb rencontre ah_1 et ah_2, on a l'angle demandé $p_1 o_2 p_2$.

145. On peut, tout en conservant le principe de la méthode, le mettre en œuvre d'une manière un peu différente.

Soit proposé de trouver l'angle dièdre SC d'un trièdre dont les arêtes SA et SB sont dans le plan horizontal de projection; on donne, outre les arêtes SA et SB, le rabattement SAC_1 autour de SA de la face ASC, et le rabattement SBC_2 autour de SB de la face BSC (Pl. XVII, fig. 146).

Prenons sur SC_1 et sur SC_2 deux longueurs arbitraires SM_1 et SM_2, mais égales entre elles. M_1 sera le rabattement autour de SA d'un certain point M de l'arête SC, et M_2 sera le rabattement autour de SB du même point M de ladite arête. Le plan auxiliaire mené par M perpendiculairement à cette arête coupera les faces CSA, CSB suivant deux droites respectivement perpendiculaires à SC au point M; on peut donc tracer immédiatement ces droites sur les faces rabattues; ce sont les perpendiculaires M_1P_1 et M_2P_2 élevées respectivement par M_1 et M_2 sur SC_1 et SC_2. Dans le relèvement des faces C_1SA, C_2SB autour de SA et de SB_1 les points P_1 et P_2 ne bougent pas; ce sont donc les traces horizontales des droites

MP_1 et MP_2 qui forment l'angle rectiligne du dièdre; cet angle rectiligne est donc l'angle opposé au côté $P_1 P_2$ dans le triangle P_1P_2M. Or, on connaît les trois côtés de ce triangle; ce sont la base P_1P_2 qu'il est d'ailleurs inutile de tracer sur l'épure, et puis les longueurs M_1P_1, M_2P_2. Si donc on décrit un arc de cercle de P_1 comme centre avec P_1M_1 pour rayon, puis un second arc de cercle de P_2 comme centre avec P_2M_2 pour rayon, et si l'on joint à P_1 et P_2 le point d'intersection M_3 de ces deux arcs, on aura en réalité construit le triangle P_1MP_2, et l'angle $P_1M_3P_2$ sera l'angle cherché.

Problèmes relatifs aux distances.

146. Les problèmes relatifs aux distances sont les suivants :

1° Distance de deux points ;

2° Distance d'un point à une droite ;

3° Distance d'un point à un plan ;

4° Distance de deux plans parallèles;

5° Distance de deux droites quelconques.

La quatrième question se ramène à la troisième, car la distance de deux plans parallèles n'est autre que la distance d'un point quelconque de l'un de ces plans à l'autre. Quant à la première et à la troisième question, nous les avons déjà traitées d'une certaine manière (nos 45 et 120); il ne nous reste donc qu'à résoudre le second et le cinquième problème et à compléter la solution du premier et du troisième.

Distance de deux points.

147. Bien que cette question ait été déjà résolue avec détail dans les nos 45 et 46, nous allons en donner une nouvelle solution qui est d'un emploi très-fréquent surtout pour le problème inverse.

On amène la droite, qui joint les deux points donnés A et B, à être de front, en la faisant tourner autour de la verticale de l'un des points A et B jusqu'à ce que sa projection horizontale soit parallèle à la ligne de terre. Dans sa nouvelle position la droite se projette en vraie grandeur sur le plan vertical. Dans la figure 145 (Pl. XVI), on a fait tourner la droite autour de la verticale du point (a,a'); ce point reste fixe, et il suffit de faire tourner le point (b,b'); à cet effet (n° 132), on décrit de a comme centre avec ab pour rayon un arc de cercle bb_1 qu'on arrête à la droite ah menée par a parallèlement à LT; b_1 est la projection horizontale du point B après la rotation et sa projection verticale est à la rencontre b'_1, de la ligne de rappel de b et de la parallèle $b'k'$ à LT menée par le point b'; $a'b'_1$ est la distance demandée.

On peut ains amener la droite AB à être horizontale en la faisant tourner autour de la perpendiculaire au plan vertical menée par A ou B, jusqu'à ce que la projection verticale soit parallèle à la ligne de terre; c'est alors la nouvelle projection horizontale de AB qui donne la distance. La construction est faite sur la figure 145. On a amené (b',b) en (b'_2,b_2) par une rotation autour de la droite qui projette verticalement le point (a,a'); la distance cherchée est ab_2.

148. Le problème inverse se résout de la même manière. On veut porter sur une droite AB, de A vers B, une longueur donnée AM. On amène la droite AB à être de front par une rotation autour de la verticale du point A, conformément aux explications données ci-dessus, puis on prend sur la nouvelle projection verticale la longueur $a'm'_1$ égale à la longueur donnée, et il ne reste plus qu'à chercher ce que devient le point m'_1 quand la droite revient à sa position première. Or il suffit de mener par m'_1

la parallèle m'_1m' à LT jusqu'à sa rencontre m' avec $a'b'$; m' est la projection verticale du point M, et une ligne de rappel $m'm$ donne la projection horizontale m.

Nous ferons remarquer encore que les constructions précédentes donnent les *angles de la droite avec les plans de projection*; $b'b'_1a'$ est l'angle avec le plan horizontal, et bb_2a l'angle avec le plan vertical.

Ces tracés se retrouvant dans la plupart des épures, le lecteur doit les répéter jusqu'à ce qu'il soit en état de les faire sans la moindre hésitation.

Distance d'un point à une droite.

149. Pour trouver la distance d'un point A à une droite BC, on rabat le plan ABC autour d'une horizontale ou d'une ligne de front; puis, on abaisse du rabattement du point une perpendiculaire sur la droite rabattue; la longueur de cette perpendiculaire est la distance demandée.

Il est avantageux de choisir pour axe du rabattement l'horizontale ou la ligne de front du plan ABC qui passe par le point A; de cette façon le point A et le point où l'axe du rabattement rencontre BC ne changent pas, et il suffit de rabattre un seul point de la droite BC. — Toutefois si la droite BC était parallèle à l'un des plans de projection, il faudrait la prendre pour axe, et ce serait alors le point A seul qu'on aurait à rabattre.

Dans la figure 147 de la Planche XVII, on a fait tourner autour de l'horizontale du point (a,a'). Ce point est resté immobile ainsi que le point (d,d') où cette horizontale rencontre BC; le rabattement a amené le point (c,c') en c_1 ; dc_1 est donc la droite rabattue, et la distance demandée est la longueur ap_1 de la perpendiculaire abaissée de a sur dc_1. On peut désirer de connaître les projections de la perpendiculaire abaissée du point A sur BC; il suffit pour cela de relever le point p_1 à l'aide d'une perpendiculaire $p_1\pi$ à l'axe ad et de joindre le point (a,a') au point (p,p') ainsi relevé ; ap, $a'p'$ sont les projections de la perpendiculaire cherchée.

Distance d'un point à un plan.

150. Pour trouver la distance d'un point A à un plan P, on abaisse du point une perpendiculaire sur le plan, on cherche l'intersection M de cette droite et du plan, puis on prend la distance du point A au point M. Dans la recherche du point d'intersection du plan P et de la perpendiculaire, on emploiera le tracé recommandé au n° 120 ; de cette façon on évite toute construction pour la dernière partie du problème, la distance des points A et M se trouvant en vraie grandeur sur le plan vertical de projection auxiliaire.

La figure 148 est relative au cas où le plan $V\omega H$ est donné par ses traces. En menant ab et $a'b'$ respectivement perpendiculaires sur ωH et ωV, on a les projections de la perpendiculaire abaissée du point (a,a') sur le plan $V\omega H$. On prend ab pour ligne de terre auxiliaire ; la nouvelle projection verticale de la perpendiculaire est a_1b_1 ; on l'a obtenue en projetant deux de ses points (a,a') (c,c') dont les cotes $\alpha a'$, $\gamma c'$ ont été portées en aa_1 et cc_1 perpendiculairement à la nouvelle ligne de terre L_1T_1 (en choisissant le point (c,c') de préférence à tout autre, on a évité le tracé d'une ligne, attendu que sa cote doit être portée sur le prolongement de H). La nouvelle trace verticale du plan s'obtient en menant du point c la perpendiculaire cd_1 sur a_1c_1 (n° 85); le point de rencontre m_1 de cd_1 et de a_1c_1 est le point où la perpendiculaire coupe le plan, et a_1m_1 est la distance cherchée. — Ce tracé a, outre sa brièveté, l'avantage d'être très-expressif; en se figurant par la pensée la figure $cc_1m_1a_1a$ relevée dans le plan vertical ab, on se rend compte parfaitement de la situation respective du point donné, du plan et de la perpendiculaire.

Dans la figure 149, on a pris les données les plus générales. De quelque manière que le plan soit donné, il faut se procurer une horizontale de ce plan afin de pouvoir tracer la projection horizontale de la perpendiculaire abaissée du point donné (a,a'). Soient donc $(hk,h'k')$ une horizontale et (c,c') un point quelconque du plan donné ; on prend pour ligne de terre auxiliaire la perpendiculaire ab abaissée de a sur hk. L'horizontale HK perce le nouveau plan vertical au point e_1 obtenu en prenant ee_1 égale à la cote de cette horizontale ; l'horizontale du point (c,c_1) perce le même plan en un point d_1 obtenu en portant sur le prolongement de la perpendiculaire cd à L_1T_1 une longueur dd_1 égale à la cote du point (c,c') ; e_1d_1 est donc la nouvelle trace verticale du plan donné. Quant à la nouvelle projection verticale a_1m_1 de la perpendiculaire, on l'obtient en menant la perpendiculaire sur e_1d_1 par la nouvelle projection verticale a_1 du point (a,a') ; a_1m_1 est la distance cherchée.

Dans les épures 148 et 149 on peut, soit pour économiser une ligne, soit pour gagner de la place, supposer qu'avant de faire la nouvelle projection verticale, on a abaissé tout le système d'une certaine quantité, par exemple de la cote du point donné (a, a'), ce qui revient à compter les cotes à partir de l'horizontale de ce point.

Plus courte distance de deux droites.

151. *Étant données deux droites* AB *et* CD (fig. 150) *non situées dans un même plan, il existe une droite et une seule qui les rencontre l'une et l'autre à angle droit.*

En effet, menons par un point quelconque A de AB un plan P perpendiculaire à cette droite, et soit Cd la projection de CD sur le plan P. Pour qu'une droite FE, s'appuyant sur AB et CD, les coupe l'une et l'autre à angle droit, il faut et il suffit que FE soit parallèle au plan P et que sa projection sur le plan P soit perpendiculaire à Cd, attendu qu'un angle droit FED dont un côté FE est parallèle au plan de projection se projette encore suivant un angle droit. Or, du point A on peut toujours abaisser une perpendiculaire Ae sur Cd, et on ne peut en mener qu'une. Donc en menant, par le point E où la projetante eE rencontre CD, la parallèle EF à Ae, on aura une droite EF rencontrant à angle droit les deux droites proposées, et la droite EF est la seule qui remplisse ces conditions.

Cette perpendiculaire commune EF *est plus courte que toute autre droite* MN *s'appuyant sur* AB *et* CD.

En effet, prenons sur eE prolongée, EI = FM, la figure EMIF étant un parallélogramme, MI sera égale et parallèle à EF; elle sera donc comme cette droite perpendiculaire au plan CEe, et par suite plus courte que l'oblique MN; donc EF est moindre que MN, c'est-à-dire est la *plus courte distance des deux droites* AB *et* CD.

La double proposition que nous venons de démontrer est déjà connue du lecteur qui, avant d'étudier la géométrie descriptive, doit posséder à fond le cinquième livre de la géométrie élémentaire. Si nous avons cru devoir la démontrer ici, c'est moins pour apprendre aux élèves un théorème nouveau, que pour leur indiquer un mode de démonstration mettant bien en évidence le principe sur lequel est fondée la construction employée en géométrie descriptive pour trouver la plus courte distance de deux droites : *on obtient la projection de la plus courte distance de deux droites sur un plan perpendiculaire à l'une d'elles, en abaissant du pied de celle-ci une perpendiculaire sur la projection de l'autre; la longueur de cette perpendiculaire est d'ailleurs égale à la plus courte distance cherchée.*

Pour ne pas dépasser les limites de notre programme, nous ferons seulement l'épure dans le cas très-simple et très-usuel où l'une des droites est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Soit donc (fig. 151) à trouver en grandeur et en position la plus courte distance de deux droites $(o, o''o''')$, $(ab, a'b')$ dont la première est verticale et dont la seconde est quelconque. La grandeur de la perpendiculaire commune s'obtient immédiatement; c'est la longueur op de la perpendiculaire abaissée du pied o de la verticale sur la projection horizontale ab de la seconde droite. Cette perpendiculaire op est d'ailleurs la projection horizontale de la plus courte distance, dont la projection verticale $o'p'$ s'obtient en relevant le point p en p' sur $a'b'$ à l'aide d'une ligne de rappel, et menant par p' la parallèle $o'p'$ à la ligne de terre.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Trouver l'angle de deux droites données chacune par deux points et situées dans un même plan perpendiculaire à la ligne de terre.

2. Trouver la distance d'un point A à une droite BC en appliquant le théorème des trois perpendiculaires, c'est-à-dire en projetant le point A sur le plan vertical qui contient la droite, puis abaissant du point D ainsi obtenu une perpendiculaire DE sur la droite BC, et en construisant enfin le triangle rectangle ADE.

3. Trouver la distance d'un point à un plan parallèle à la ligne de terre.

4. Trouver sur une droite un point dont la distance à un point donné ait une longueur donnée.

5. Par une droite d'un plan mener un plan perpendiculaire au premier.

6. Connaissant l'angle de deux droites et les angles que

chacune de ces droites fait avec la verticale de leur point de concours, trouver l'angle des plans verticaux passant par ces deux droites.

7. Trouver la plus courte distance entre une droite quelconque et la ligne de terre.

8. Construire l'angle de deux plans donnés chacun par sa trace horizontale et par son inclinaison sur le plan horizontal.

9. Par une droite d'un plan mener un second plan faisant un angle donné avec le premier.

10. On donne un tétraèdre par sa base ABC située dans le plan horizontal, par la projection horizontale et la cote de son sommet D. On demande de trouver : 1° les angles plans DAB, ADB ; 2° l'angle dièdre suivant AD ; 3° la distance du point A au plan BDC ; 4° la distance du point A à la droite BC ; 5° la plus courte distance entre DA et BC.

CHAPITRE IX

CERCLE ET SPHÈRE.

Notions préliminaires.

152. D'après la définition donnée au n° 3, on obtient la projection d'une courbe en projetant les divers points de cette ligne et unissant les points ainsi trouvés par un trait continu.

Ce tracé *par points* doit, pour plus d'exactitude, être complété par la *construction des tangentes*. Cette construction est fondée sur le principe suivant :

La tangente à la projection d'une courbe est la projection de la tangente à cette courbe au point correspondant.

En effet, soit ab la projection sur un plan H (Pl. XVII, fig. 152), d'une courbe AB, située d'une manière quelconque dans l'espace.

La tangente mt à la ligne ab est la limite de la sécante $mm's$, qui unit le point m à un point voisin m'. Or, cette sécante est la projection de la droite MM'S, qui joint les points M et M' de AB projetés en m et m'; et comme quand le point m se réunit à m, le point M' se réunit à M, les deux droites ms, MS deviennent simultanément les tangentes mt et MT, sans que la première cesse d'être la projection de la seconde.

Ce théorème suppose toutefois que la tangente MT ne soit pas perpendiculaire au plan de projection; sans quoi sa projection se réduirait au point m et ne serait plus, par conséquent, la tangente mt à la courbe ab. Ainsi, le principe précédent ne pourra pas être appliqué aux points exceptionnels de la courbe de l'espace où la tangente est perpendiculaire au plan de projection.

Cela posé, nous allons passer à l'étude de la projection du cercle et de la représentation de la sphère.

Projection d'un cercle dont on donne le plan, le centre et le rayon.

153. On donne le plan, le centre et le rayon d'un cercle, et l'on demande la projection horizontale de la circonférence (fig. 153).

De quelque manière que le plan soit donné, on se procurera l'horizontale qui passe par le centre du cercle et l'inclinaison α du plan sur le plan horizontal; soit donc ab la projection du diamètre horizontal et, par suite, o, milieu de ab, la projection du centre dont la cote est censée connue. Rabattons le plan autour de l'horizontale AB ; le cercle se projettera alors en vraie grandeur, suivant la circonférence décrite sur ab comme diamètre, et tout le problème se réduira à revenir de ce rabattement à la projection. On a, d'ailleurs, tous les éléments nécessaires pour effectuer ce tracé, puisqu'on connaît l'angle α du plan avec le plan de projection. Pour avoir la projection m du point M, qui est actuellement rabattu en m_1, on mènera la perpendiculaire $m_1\mu$ sur la charnière ; par le point μ on mènera une droite μl faisant avec $m_1\mu$ un angle égal à α; du point μ comme centre avec $\mu_1 m_1$ pour rayon, on décrira un arc de cercle et l'on projettera sur μm_1 le point m_2 où cet arc de cercle rencontre μl.

Cherchons la tangente au point m. Cette tangente est la projection de la tangente au cercle au point M, laquelle est ici rabattue, suivant la tangente en m_1 au cercle ac_1b. Il s'agit donc de passer du rabattement m_1t d'une droite à sa projection, et, comme le point m_1 se relève en m, on voit qu'il suffit de relever un seul point de la tangente ; on choisira celui que l'on voudra et la construction sera la même que celle qui a servi pour passer de m_1 à m ; mais si le point t, où la tangente rabattue m_1t rencontre la charnière ab, n'est pas hors de l'épure, c'est ce point t qu'il faudra choisir ; car il reste invariable et, par suite, son emploi n'exige aucun tracé ; il suffit de mener tm pour avoir la tangente demandée.

154. Le problème proposé peut être considéré comme complétement résolu, puisque, en répétant les tracés indiqués, on aura autant de points qu'on voudra de la projection du cercle, ainsi que les tangentes en ces points. Mais la courbe que l'on obtient ainsi a une telle importance dans les mathématiques pures ou appliquées qu'il convient de s'arrêter un peu sur ses propriétés fondamentales.

Cette courbe, qui a la forme ovale, a reçu le nom d'*ellipse*. Elle passe par les extrémités a et b du diamètre ab, puisque ces points, étant sur la charnière, restent immobiles ; les tangentes en a et b sont d'ailleurs perpendiculaires à ab ; car la tangente en A au cercle proposé forme avec AB un angle droit qui se conserve en projection, puisque son côté AB est parallèle au plan de projection. — Aux points c et d, situés sur la perpendiculaire, au milieu de ab, les tangentes sont parallèles à ab, attendu que les tangentes en C et D au cercle proposé sont parallèles à AB.

On sait que le milieu de la projection d'une droite est la projection du milieu de cette droite. D'après cela, toute corde de l'ellipse passant par le point o sera divisée par ce point en deux parties égales, puisque cette corde est la projection d'un diamètre du cercle et que le centre O du cercle est le milieu de tous les diamètres. Aussi donne-t-on au point *o* le nom de *centre* de l'ellipse.

Si l'on considère dans l'ellipse une série de cordes parallèles, leurs milieux seront les projections des milieux d'une série de cordes parallèles dans le cercle ; par suite ils appartiendront à la projection du diamètre du cercle qui divise ces dernières cordes en parties égales. Donc, *le lieu des milieux d'une série de cordes parallèles dans l'ellipse est une droite passant par le centre*. On donne le nom de *diamètres* de l'ellipse aux droites passant par le centre de cette courbe. — Dans le cercle, tout diamètre est perpendiculaire aux cordes qu'il divise en deux parties égales; il n'en est plus de même dans l'ellipse, puisque la projection d'un angle droit n'est pas, en général, un angle droit; toutefois, la perpendicularité subsiste, si l'un des côtés de l'angle droit que l'on projette est parallèle au plan de projection; c'est ce qui arrive pour les diamètres AB et CD du cercle ; d'où il suit que les diamètres *ab* et *cd* de l'ellipse sont perpendiculaires aux cordes qu'ils divisent en parties égales. On donne à ces deux droites *ab* et *cd*, par rapport auxquelles la courbe est symétrique, le nom d'*axes* de l'ellipse; l'axe *ab*, qui est égal au diamètre du cercle, est dit le *grand axe*, et l'axe *cd*, qui est moindre que le diamètre du cercle et qui est d'autant moindre que le plan du cercle est plus incliné sur le plan de projection, est dit le *petit axe*. Les points *a*, *b*, *c*, *d*, où les axes rencontrent la courbe, sont appelés les *sommets* de l'ellipse.

Nous avons démontré directement les propriétés qui précèdent. On peut aussi les déduire du tracé du n° 153; cette recherche sera pour le lecteur un exercice intéressant.

155. Quand on connaît les deux axes d'une ellipse en grandeur et en position, on peut, à l'aide d'une bande de papier, obtenir très-rapidement autant de points qu'on veut de cette courbe. Ce nouveau tracé par points est fondé sur une propriété caractéristique de l'ellipse, que nous allons démontrer d'abord.

On appelle *ordonnée* d'un point quelconque m de l'ellipse la perpendiculaire $m\mu$ abaissée de ce point sur le grand axe; la perpendiculaire $m_1\mu$ est l'*ordonnée* correspondante du cercle ac_1b décrit sur le grand axe comme diamètre. Le rapport de ces deux ordonnées, ou, ce qui revient au même, le rapport de $m\mu$ à $m_2\mu$ est égal, à cause des triangles semblables $m\mu m_2$, coc_2, au rapport de co à c_2o, c'est-à-dire au rapport du demi petit axe oc ou demi grand axe ob. Ce rapport est donc constant, et l'on peut définir l'ellipse comme étant la *courbe qu'on déduit du cercle en réduisant dans un même rapport toutes les ordonnées*. C'est la propriété que nous avions en vue, et voici le tracé expéditif qui en découle.

Soient AA′ et BB′ (Pl. XVIII, fig. 154), les deux axes de l'ellipse. Sur le bord d'une bande de papier, on marquera trois points α, β, M, tels que $M\alpha = OA$ et et $M\beta = OB$; puis, on déplacera la bande de manière que le point α glisse sur OB′ et que le point β glisse sur OA, et l'on marquera sur le papier, avec la pointe d'un crayon, la position qu'occupe chaque fois le point M; le lieu de ces points sera l'ellipse demandée. En effet, $\alpha\beta M$ étant la bande de papier, dans l'une quelconque de ses positions, menons ON parallèle à $\alpha\beta$ jusqu'à sa rencontre avec l'ordonnée MP du point M. On aura évidemment $ON = M\alpha = OA$, de sorte que le lieu des points N sera le cercle décrit sur AA′ comme diamètre. D'ailleurs les triangles semblables OPN, βPM montrent que le rapport des ordonnées MP et NP est égal au rapport de $M\beta$ à NO, c'est-à-dire de OB à OA. Le lieu des points M, se déduisant du cercle ANA′ par la réduction de toutes les ordonnées dans le rapport de OB à OA, est l'ellipse qui a pour axes OA et OB.

156. Il arrive souvent que l'on connaît un seul axe AA′ en grandeur et en position, et un pour M de la courbe; il faut alors, avant d'appliquer le tracé précédent, chercher le second axe BB′ en grandeur et en position.

A cet effet, on mène d'abord une perpendiculaire à AA′ en son milieu O ; le second axe sera dirigé suivant cette perpendiculaire CC′. Puis, du point M, comme centre avec un rayon égal à OA, on décrit un arc du cercle ; on joint au point M le point α, où cet arc coupe CC′ ; soit β l'intersection de $M\alpha$ et de AA′ ; le segment $M\beta$ est égal au demi-axe cherché ; il suffit donc de porter cette longueur sur CC′ à partir de O, et de part et d'autre de ce point pour avoir les deux sommets B et B′.

Projection d'un cercle passant par trois points donnés.

157. Pour trouver les projections d'un cercle passant par trois points donnés, on rabat le plan des trois points autour d'une horizontale ou d'une ligne de front de ce plan ; on construit le cercle qui passe par les trois points rabattus ; puis on relève les points et les tangentes de ce cercle.

Soient (Pl. XVIII, fig. 155) (a, a') (b, b') (c, c') les trois points donnés ; nous avons rabattu autour de l'horizontale AD du point A. Le point A et le point D où cette horizontale rencontre BC n'ont pas changé ; le point B a été rabattu en B_1, d'après le tracé connu (nº 123) ; quant au point C, son rabattement C_1 est à l'intersection de $B_1 d$ et de la parallèle cC_1 à bB_1.

On a tracé le cercle circonscrit au triangle aB_1C_1 et relevé un point quelconque P_1 de ce cercle et la tangente $P_1 t$ en ce point. A cet effet, on a pris les points t et θ_1 où cette tangente rencontre aC_1 et ad ; le point t reste immobile ; quant au point θ_1, son relèvement θ est à la rencontre de ac et de la parallèle $\theta_1\theta$ à $B_1 b$. La droite θt est donc la projection horizontale de la tangente ; son point de contact est en p sur la parallèle P_1p à B_1b. En reportant t et θ en t' et θ' sur $a'd$ et $a'c'$ par des lignes de rappel, on obtient la projection verticale $\theta' t'$ de la tangente ; la ligne de rappel pp' du point p donne la projection verticale p' du point de contact.

On obtiendra autant de points et autant de tangentes qu'on voudra en répétant l'opération précédente, que l'on peut d'ailleurs varier en utilisant, pour relever les droites, leurs points d'appui sur des droites déjà relevées.

158. Au lieu d'opérer ainsi point par point, on préfère le plus souvent déterminer les axes des deux ellipses qui sont les projections du cercle, puis tracer ces ellipses par le procédé rapide du n° 155.

Voici comment on s'y prend (fig. 156) :

Après avoir construit l'horizontale AD et la ligne de front AF du plan des trois points donnés A, B, C, on rabat autour l'horizontale AD. Le point A ne change pas ; le point F vient sur la perpendiculaire $f\varphi$ à la droite ad en un point F_1, tel que $aF_1 = a'f'$ (n° 129) ; dès lors les parallèles à $a'f'$, menées par b et c, donnent par leurs rencontres avec dF_1 les rabattements B_1 et C_1 des points B et C.

On détermine, par la construction connue de géométrie plane, le centre O_1 du cercle qui passe par les points a, B_1, C_1; il est inutile de tracer ce cercle. On relève le point O_1 en (o, o'), par le procédé du n° 129, c'est-à-dire en se servant de la ligne de front qui passe par ce point, ligne de front dont le rabattement $O_1\omega$ est parallèle à aF_1.

Le grand axe de l'ellipse, projection horizontale du cercle, est dirigé suivant l'horizontale mn du point o, et sa longueur est égale au diamètre du cercle. On prendra donc $om = on = O_1a$, et l'on aura le grand axe en grandeur et en position. La connaissance de cet axe et de l'un des points de l'ellipse, par exemple du point b, suffit, comme nous l'avons indiqué au n° 156, pour qu'on puisse avoir l'autre axe poq, et, par suite, tracer l'ellipse par points.

On tracera de même l'ellipse, projection verticale ; en prenant sur la ligne de front $o'\omega'$ des longueurs $o'u'$ et $o'v'$ égales à $O_1 a$, on aura le grand axe $u'v$; connaissant cet axe et le point b', on achèvera comme il est dit aux nos 156 et 155.

Application à la représentation d'une porte.

159. Pour donner un exemple de la projection d'un cercle situé dans un plan vertical, nous avons représenté dans la figure 158 les projections d'une porte circulaire pratiquée dans un mur à faces verticales parallèles, mais obliques par rapport au plan vertical de projection.

La figure 157 est un croquis en perspective cavalière de cette porte, dont la disposition est ainsi facile à saisir; dans ce croquis, on n'a marqué que les parties visibles.

Pour construire la figure 158, on tracera d'abord le plan ou projection horizontale. Cette projection se compose de deux droites parallèles xy, uv, qui sont les traces de la face antérieure et de la face postérieure du mur, et de deux perpendiculaires communes à ces deux droites; ces perpendiculaires, bd, ac, représentent les traces des montants verticaux, dont un seul $B_1 D_1$ DB, celui de droite, est figuré dans la perspective (fig. 157).

Pour faire l'élévation ou projection verticale, on projettera les points a, b, c, d sur la ligne de terre, et par les points a_1', b_1', c_1', d_1', ainsi obtenus, on menera des verticales $a_1'a'$, $b_1'b'$, $c_1'c'$, $d_1'd'$, dont la hauteur commune sera prise égale à la hauteur donnée des montants verticaux ou *jambages* de la porte. Il ne restera plus qu'à tracer les deux projections verticales du demi-cercle AMB et de son analogue situé sur la face postérieure. La projection du demi-cercle AMB est une ellipse dont on a déjà le petit axe $a'b'$, et dont le demi-grand axe est vertical; ce demi-axe est d'ailleurs égal au rayon même du cintre de la porte, c'est-à-dire à la moitié de ab. On prendra donc le milieu e' de $a'b'$ et, par ce point, on mènera la verticale $e'm'$ que l'on fera égale à la moitié de ab; la demi-ellipse $a'm'b'$ se tracera alors sans difficulté. On aura de même la demi-ellipse $c'n'd'$, qui n'est autre que la première reculée vers la gauche, d'une quantité égale à $b'd'$. On se rendra compte sans peine des parties vues et des parties cachées.

Représentation de la sphère.

160. Nous supposons que le lecteur connaisse la définition et les propriétés les plus élémentaires de la sphère telles que la distinction entre les grands cercles et les petits cercles, la notion du plan tangent, etc. (Voir le § III du livre VII de nos *Éléments de Géométrie*).

On donne le nom de *parallèle* à tout cercle horizontal de la sphère ; les parallèles sont des petits cercles, à l'exception de celui qui est dans le plan horizontal passant par le centre de la sphère ; ce parallèle maximum, qui est un grand cercle, reçoit le nom d'équateur.

On appelle *plan méridien* tout plan vertical passant par le centre de la sphère, et simplement *méridien* tout grand cercle dont le plan est vertical. En particulier le grand cercle de front reçoit le nom de *méridien principal*, et son plan est dit le *plan méridien principal*.

On représente une sphère, en projection horizontale par la projection de l'équateur, et en projection verticale par la projection du méridien principal. La raison de ce mode de représentation est facile à comprendre après ce que nous avons dit, à propos des polyèdres, sur la représentation des corps en géométrie descriptive. Quand on considère la projection horizontale, on suppose le spectateur placé à l'infini sur une verticale ; les rayons visuels sont alors tous verticaux, et le spectateur n'aperçoit que la moitié de la sphère qui est située au-dessus de l'équateur ; aussi donne-t-on à la projection horizontale de cette ligne le nom de *contour apparent de la sphère sur le plan horizontal*, et représente-t-on la sphère en projection horizontale par ce contour apparent. — D'une manière analogue, quand on considère la projection verticale, le spectateur étant supposé placé à l'infini sur une perpendiculaire au plan vertical, tous les rayons visuels sont perpendiculaires à ce plan vertical, et c'est le méridien principal qui sépare sur la sphère la moitié antérieure que le spectateur aperçoit de la moitié postérieure qui lui est cachée ; voilà pourquoi on nomme *contour apparent sur le plan vertical*, la projection verticale du méridien principal et on représente la sphère en projection verticale par ce contour apparent.

Nous nous bornerons ici, sur les contours apparents, à ces notions sommaires qui suffisent pour notre objet ; ces notions seront développées et généralisées dans la deuxième partie de ce cours.

Connaissant l'une des projections d'un point d'une sphère, trouver l'autre projection de ce point.

161. Soient (pl. XIX, fig. 159), une sphère (o, o') donnée par ses contours apparents et m la projection horizontale d'un point M de cette sphère ; quelle est la projection verticale de ce point ?

Le parallèle du point M se projette horizontalement, en vraie grandeur, suivant le cercle décrit du point o comme centre avec om pour rayon. Ce parallèle s'appuie sur le méridien principal en un point qui est projeté horizontalement en n, à la rencontre du cercle om et de la droite ab projection horizontale du méridien principal. Une ligne de rappel permet de relever n en n' sur la projection verticale du méridien principal ; le parallèle du point M a donc pour cote vn', et sa projection verticale est la parallèle $n'p'$ à la ligne de terre menée par n' ; la ligne de rappel du point m donne par sa rencontre m' avec $n'p'$ la projection verticale du point M.

La ligne de rappel nv rencontre en réalité le méridien principal en deux points n' et n'' ; de là deux parallèles $n'p'$, $n''p''$ qui se projettent l'un et l'autre sur le cercle nmp, et par suite deux points (m,m'), (m,m'') de la sphère qui se projettent horizontalement en m.

On arrive au même tracé par un autre raisonnement qu'il importe de connaître :

Considérons le plan méridien qui contient le point M et dont la trace horizontale est om. Faisons tourner ce plan autour de la verticale du centre de la sphère de manière à amener ce méridien en coïncidence avec le méridien principal. La verticale du point m viendra sur la verticale du point n, et par suite n' (ou n''), sera la projection verticale du point considéré M après la rotation. En revenant à sa position primitive, ce point ne change pas de hauteur ; sa projection verticale m' (ou m'') est donc à la rencontre de la parallèle à la ligne de terre $n'p'$ (ou $n''p''$) et de la ligne de rappel du point m.

Le lecteur doit se familiariser également avec ces deux manières de raisonner, qui sont fondées l'une sur la considération du parallèle et l'autre sur la considération du méridien qui passent par le point cherché.

162. On pourrait donner la projection verticale m' d'un point M de la sphère et demander la projection horizontale.

En considérant le parallèle du point M, on dirait : ce parallèle se projette verticalement suivant la corde $p'm'n'$ parallèle à la ligne de terre, et par suite horizontalement suivant le cercle pn dont le diamètre est égal à cette corde ; la ligne de rappel du point m' coupe le cercle pn en deux points m et m_1 ; de là les deux points (m,m') (m_1,m') de la sphère qui ont m' projection verticale.

On pourrait considérer le méridien du point M, et dire : quand ce méridien vient, par une rotation autour de la verticale du centre de la sphère, coïncider avec le méridien principal, la projection verticale m' du point M se déplace parallèlement à la ligne de terre ; elle vient donc en n' ; la projection horizontale de ce point est alors en n sur ab ; quand M revient à sa position primitive, sa projection horizontale se meut donc sur le cercle on, et par suite cette projection est à l'intersection m ou m_1 de ce cercle avec la ligne de rappel du point m'.

Intersection d'une sphère et d'un plan.

163. On sait que toute section plane d'une sphère est un cercle dont le centre est la projection du centre de la sphère sur ce plan ; le rayon de ce cercle est d'ailleurs égal au côté de l'angle droit d'un triangle rectangle qui a pour hypoténuse le rayon de la sphère et pour second côté de l'angle droit la distance du centre de la sphère au plan sécant.

D'après cela, de quelque manière que le plan sécant P soit donné, on commencera par déterminer le pied et la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan P ; on emploiera pour cela le tracé indiqué au n° 150. Puis, en construisant le triangle rectangle défini dans l'alinéa précédent, on aura la longueur du rayon. On se trouvera alors dans les conditions du n° 153, et on aura les projections du cercle d'après la marche indiquée dans ce numéro.

Si le cercle rencontre l'équateur, sa projection horizontale touchera le contour apparent horizontal aux points correspondants. Car en un tel point de rencontre, les tangentes au cercle et à l'équateur, bien qu'elles soient distinctes, sont situées dans le plan tangent à la sphère qui est alors vertical ; ces deux tangentes ont donc la même projection horizontale. — On voit de même que si le cercle rencontre le méridien principal, sa projection verticale touchera le contour apparent vertical aux points correspondants. — Ces points, situés sur les contours apparents, sont importants à déterminer, car ils sont les points de passage de la partie vue à la partie cachée dans chacune des projections ; on devra donc commencer par chercher ces points ; il suffira de prendre l'intersection de l'équateur avec l'horizontale du plan P qui est à la hauteur du centre de la sphère, et l'intersection de la méridienne principale avec la ligne de front du plan P qui a un éloignement égal à celui du centre de la sphère.

164. Voici deux épures sur ce sujet :

La figure 160 représente l'intersection d'une sphère (o,o') et d'un plan VαH perpendiculaire au plan vertical de projection. Ici, le résultat s'obtient immédiatement, vu la disposition particulière des données ; le cercle a pour diamètre la corde $(b'b'_1,\ bb_1)$ située dans le plan méridien principal. Cette corde est la projection verticale du cercle. Quant à la projection horizontale, c'est une ellipse dont bb_1 est le petit axe, et dont le grand axe égal à $b'b'_1$ est dirigé suivant la perpendiculaire à LT menée par le milieu c de bb_1. Avant de tracer cette ellipse, il conviendra d'obtenir directement les points (qeq_1) où elle touche le contour apparent horizontal ; or l'intersection du plan VαH et du plan de l'équateur est la droite (q',qq_1) perpendiculaire au plan vertical ; les points q_1 et q sont les points communs au cercle ed et à la projection horizontale qq_1 de cette droite. La partie q et q_1 de l'ellipse répond à la partie du cercle qui est au-dessus de l'équateur, puisque le point (b_1,b'_1) est au-dessus de l'équateur ; donc l'arc d'ellipse qb_1q_1 est vu, et l'autre arc qbq est caché.

La figure 161 est relative à l'intersection d'une sphère (o,o') par un plan quelconque que nous supposons donné par sa trace $(ab,a'b')$ sur le plan de l'équateur et par sa trace $(ac, a'c')$, sur le plan méridien principal. — On a ici immédiatement quatre points du cercle ; ce sont les points (e,e') (f,f') où ce cercle rencontre l'équateur, et les points (g,g'), (h,h') où il rencontre le méridien principal. La projection horizontale du cercle touchera le contour apparent horizontal de la sphère en e et f, et sa projection verticale touchera le contour apparent vertical en g' et h'.

Cherchons le pied et la longueur de la perpendiculaire abaissée du centre de la sphère sur le plan sécant BAC. Les projections op et $o'p'$ de cette perpendiculaire sont respectivement à angle droit sur ab et $a'c'$; prenons le plan vertical dont la trace est op pour nouveau plan de projection conformément aux prescriptions du n° 150, mais au lieu de rabattre ce plan autour de sa trace horizontale, rabattons-le autour de l'horizontale $(op, o'b')$ qui passe par le centre (o,o') ; la nouvelle projection verticale du centre sera en o ; la nouvelle projection p_1 du point (p,p') s'obtiendra en prenant sur ab la longueur pp_1 égale à la cote relative $\pi p'$ de (p,p') ; op_1 sera donc la projection verticale nouvelle de la perpendiculaire au plan, et par suite la droite pq_1 menée par p à angle droit sur oq_1 sera la nouvelle trace verticale du plan; oq_1 est la longueur de la perpendiculaire et son pied est projeté actuellement en q_1; les projections q et q' de ce point sur les plans de projections primitifs s'en déduisent immédiatement; ce sont les projections du centre du cercle suivant lequel le plan proposé coupe la sphère. Quant au rayon de ce cercle, il est égal à q_1r_1, car si l'on imagine la droite or, on voit que q_1r_1, est le second côté de l'angle droit d'un triangle rectangle oq_1r_1, dont le premier côté est la distance oq_1 et dont l'hypoténuse est le rayon or_1 de la sphère.

Dès lors les ellipses projections du cercle s'obtiennent sans difficulté. Le grand axe lk de l'ellipse horizontale est dirigé suivant qq_1 et égal au double de q_1r_1 ; à l'aide de cet axe et de l'un des quatre points connus e,f,h,g, on détermine l'autre axe et l'on trace l'ellipse par points, comme on l'a expliqué au n° 155. On opère de même pour l'ellipse projection verticale; son grand axe $m'n'$, égal aussi au double de q_1r_1, est dirigé suivant la parallèle à $a'c'$ menée par le point q'.

Le point (h,h') étant au-dessus de l'équateur, la partie vue de l'ellipse horizontale est l'arc ehf; de même le point $(f,'f)$ étant en avant du méridien principal, l'arc $g'f'h'$ est la partie vue de l'ellipse projection verticale.

Ombre propre d'une sphère.

165. On sait (voir nos *Éléments de géométrie*, n° 484), que par un point S extérieur à une sphère, on peut mener à cette surface une infinité de tangentes qui sont égales entre elles et qui forment un cône de révolution circonscrit à la sphère; le lieu des points de contact de ces tangentes, c'est-à-dire la *courbe de contact* du cône et de la sphère, est un petit cercle C, dont le plan est perpendiculaire à la droite qui unit le centre de la sphère au point extérieur S.

Si le point S est un point lumineux, le cône prend le nom de *cône d'ombre* et le cercle de contact C, celui de *courbe d'ombre propre*. Cette ligne sépare en effet, sur la surface sphérique, la partie éclairée de la partie obscure ; il suffit pour s'en rendre compte de concevoir la droite qui joint le point S à un point quelconque M de la surface sphérique; si le point M appartient à la région qui est du même côté que le point S par rapport au plan du cercle C, la droite SM ne rencontre pas la sphère entre S et M; la lumière arrive donc au point M. Mais si ce point M st pris sur l'autre région, la droite SM rencontre la sphère entre S et M, et la lumière ne pouvant plus arriver en M, ce point est dans l'ombre.

Cela posé, soient une sphère (o,o') donnée par ses contours apparents et un point lumineux (s,s') donné par ses deux projections ; proposons-nous de trouver les projections de la courbe d'ombre propre. (fig. 162).

Imaginons que le plan méridien os qui contient le point lumineux tourne autour de la verticale du centre de la sphère, de manière à venir coïncider avec le plan du méridien principal, et soit (s_1,s_1') la position du point lumineux après la rotation. Dans cette position, la courbe d'ombre s'obtiendrait immédiatement; il suffirait de mener du point s_1', des tangentes $s_1'a_1'$, $s_1'b_1'$ au contour apparent vertical; la courbe d'ombre serait le cercle projeté verticalement sur la corde $a_1'b_1'$, et sa projection horizontale serait une ellipse dont a_1b_1 projection de $a_1'b_1'$ serait le petit axe. Si l'on ramène le point (s_1,s_1') à sa position primitive (s,s'), en supposant le cercle d'ombre entraîné dans la rotation, les points a_1,b_1,c_1 se transportent sur os en suivant les cercles a_1a, b_1b, c_1c qui ont o pour centre commun; l'ellipse projection horizontale du cercle d'ombre a donc c pour centre et ab pour petit axe; son grand axe s'obtient en portant de part et d'autre de c, perpendiculairement à ab, des longueurs ce et cf égales à $c_1'a_1'$.

Quant à l'ellipse, projection verticale du cercle d'ombre, son centre c' est sur $o's'$, à la rencontre de cette droite avec la parallèle à LT menée par c_1'; son grand axe $g'h'$ est dirigé suivant la projection verticale de la ligne de front du plan du cercle d'ombre, c'est-à-dire suivant la perpendiculaire à $o's'$, puisque le plan du cercle d'ombre est normal à la droite $(so,s'o')$; ce grand axe est d'ailleurs égal à $o_1'b_1'$. La connaissance de cet axe, et d'un point (b,b') permet de tracer l'ellipse (n° 156).

Il convient de chercher directement les points situés sur les contours apparents. Les points p et q, situés sur le contour apparent horizontal, sont les points de contact des tangentes menées par s à la projection de l'équateur; car aux points P et Q où le cercle d'ombre rencontre l'équateur, le plan tangent à la sphère est vertical et contient le point lumineux; sa trace horizontale doit donc à la fois être tangente à la projection horizontale de l'équateur et contenir la projection horizontale du point lumineux. — On voit de même que les points u' et v', situés sur le contour apparent vertical, sont les points de contact des tangentes menées de s' à la projection verticale du méridien principal.

En projection horizontale, c'est l'arc qbp, qui est caché puisque le point (b,b') de cet arc est au-dessous de l'équateur. En projection verticale, l'arc vu est $v'b'u'$, puisque le point (b,b') de cet arc est en avant du plan méridien principal.

Nous avons mis des hachures sur les parties de la sphère qui sont dans l'ombre et qui sont visibles.

166. Nous venons de considérer la sphère éclairée par un flambeau. Dans le cas du soleil, il faut supposer le point S à l'infini dans une direction donnée ; le cône dégénère alors en un cylindre circonscrit, et la séparative devient le grand cercle perpendiculaire à la direction des rayons lumineux. — Voici l'épure (fig. 163), qui est très-simple et très-importante au point de vue pratique.

Soient (o,o') le centre de la sphère et $(or,o'r')$ une droite parallèle aux rayons lumineux. La courbe d'ombre étant un grand cercle dont le plan est perpendiculaire à la droite OR, les diamètres de ce cercle qui sont parallèles aux plans de projection ont pour projection, l'un le diamètre ab perpendiculaire à or, l'autre le diamètre $c'd'$ perpendiculaire à $a'b'$; on connaît donc les grands axes ab et $c'd'$ des deux ellipses ; d'ailleurs en projetant c' et d' en c et d sur xy on a deux points de l'ellipse horizontale ; et en projetant a et b en a' et b' sur $u'v'$ on a deux points de l'ellipse verticale. Ces deux ellipses se tracent donc sans difficulté. Nous avons indiqué sur la figure les constructions nécessaires pour trouver les petits axes des ellipses ; on a décrit respectivement de c et de a' comme centres avec le rayon de la sphère pour rayon, des arcs de cercle qui coupent l'un or en δ, l'autre $o'r'$ en α ; en joignant $a'\alpha$ et $c\delta$, on a obtenu en $a'\beta$ et $c\theta$ les longueurs des petits axes.

La partie vue de l'ellipse horizontale est adb, car le point (d,d') au-dessus de l'équateur ; la partie vue de l'ellipse verticale est $c'b'd'$, car le point (b,b') est en avant du plan méridien principal. — On a mis des hachures sur les parties qui sont dans l'ombre et qui sont visibles.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Un triangle étant donné par ses deux projections, trouver l'intersection du cercle circonscrit avec une droite située dans le plan du triangle et donnée par l'une de ses projections.

2. Un triangle étant donné par ses deux projections, mener au cercle circonscrit à ce triangle des tangentes par un point situé dans le plan du cercle et donné par sa projection horizontale ou verticale.

3. Trouver les points de rencontre d'une droite et d'une sphère (on rabat le plan déterminé par la droite et le centre de la sphère).

4. Mener à une sphère des plans tangents par une droite donnée. (On rabat le plan mené par le centre de la sphère perpendiculairement à la droite.)

5. Trouver l'intersection de deux sphères.

6. Trouver la plus courte distance d'un point à une sphère.

7. Étant donné un tétraèdre régulier dont la base repose sur le plan horizontal, représenter la sphère circonscrite à ce tétraèdre et marquer sur cette sphère les lignes suivant lesquelles elle est coupée par les faces du tétraèdre.

CHAPITRE X

POLYÈDRES.

Section droite et développement d'un prisme.

167. Nous avons déjà indiqué au n° 81 un procédé général pour trouver la section plane d'un polyèdre ; ce procédé consiste à projeter le polyèdre sur un nouveau plan vertical perpendiculaire au plan sécant.

On peut aussi obtenir la section en cherchant successivement les intersections des arêtes avec le plan sécant.

Cette seconde manière d'opérer coïncide d'ailleurs avec la première lorsque la section demandée est la section droite d'un prisme oblique et que l'on applique le tracé recommandé au n° 120 à la recherche de l'intersection de chaque arête et du plan.

Soit (Pl. XX, fig. 165), un prisme dont la base ABCDE est située dans le plan horizontal de projection ; on donne la projection horizontale aa_1 de l'une de ses arêtes latérales ainsi que la cote du point de cette arête qui est projeté en a_1. On demande de trouver la section droite qui passe par le point A_1 et de représenter le tronc du prisme compris entre le plan de cette section droite et le plan horizontal de projection.

Projetons sur un plan vertical LT parallèle aux arêtes latérales du prisme. Le point A s'y projette en a' sur LT, le point A_1 en a'_1 à une distance de LT égale à la cote donnée ; les projections horizontales et verticales des autres arêtes s'obtiendront en menant par les sommets de la base des parallèles à aa_1 et à aa'_1. Quant au plan sécant il sera perpendiculaire au plan vertical; sa trace verticale sera la perpendiculaire Vω élevée par a'_1 sur $a'a'_1$, et sa trace horizontale ωH sera perpendiculaire à LT.

Les points $a'_1, b'_1, c'_1, d'_1, e'_1$ où les projections verticales des arêtes rencontrent Vω sont les projections verticales des sommets de la section droite, et il suffit de les descendre par des lignes de rappel sur les projections horizontales des arêtes correspondantes pour avoir la projection horizontale $a_1b_1c_1d_1e_1$ de la section droite demandée.

Cette section est ici entièrement visible; les parties cachées sont, en projection horizontale, les côtés ab, bc, cd de la base et les arêtes bb_1, cc, en projection verticale les arêtes $c'c'_1$, $d'd'_1$.

L'épure est parfaitement disposée pour obtenir sans peine la vraie grandeur de la section droite et le développement de la surface latérale du prisme.

Dans le rabattement du plan VωH, chaque sommet (b_1, b'_1), par exemple, vient sur la projection horizontale de l'arête latérale correspondante, à une distance Bb_2 de ωH égale à la distance $\omega b'_1$ du point ω à la projection verticale b'_1 de ce sommet.

On obtient le développement de la surface latérale, en portant sur une droite les vraies longueurs des côtés de la section droite (prises sur le rabattement $a_2b_2c_2d_2e_2$), et élevant sur cette droite par les points obtenus des perpendiculaires égales aux vraies longueurs des arêtes correspondantes (prises sur la projection verticale). Dans notre épure nous avons choisi pour la droite en question la ligne Vω prolongée; de cette façon les longueurs des arêtes se reportent immédiatement sur les perpendiculaires a_3a_4, b_3b_4,.... en menant par a', b',... des parallèles à Vω. La ligne polygonale $a_4b_4c_4d_4a_4$ est la transformée de la base du prisme; l'arête AA_1 suivant laquelle on suppose que le prisme a été ouvert se dédouble; et les trapèzes successifs $a_3b_3b_4c_4$, $b_4b_3e_3c_4$..... sont les vraies grandeurs des faces latérales.

On a aussi tous les éléments nécessaires pour reproduire le tronc de prisme en bois ou en pierre. Sur une face du bloc, on portera le patron découpé ou *panneau* de la section droite $a_2b_2c_2d_2e_2$; on abattra la matière solide perpendiculairement à cette face en suivant les contours du panneau et se servant d'une équerre (n° 5); dès qu'on aura fait ainsi apparaître les plans des faces latérales, on appliquera sur chacun d'eux le panneau correspondant relevé sur le développement; on pourra alors marquer sur chaque face latérale le côté correspondant de la base, dont on fera ensuite apparaître le plan en abattant l'excédant de matière solide de façon qu'une règle s'appuye sans cesse sur les côtés marqués de la base.

Sections planes de prismes ou de pyramides.

168. Soient (Pl. XIX, fig. 164), deux plans P et Q et un point S situés d'une manière quelconque dans l'espace, à tout point M du plan P, répond dans le plan Q un point N situé sur la droite SM. Nous dirons que ce point N est l'*homologue* de M. Ainsi, deux points M et N appartenant l'un au plan P, l'autre au plan Q sont dits *homologues*, lorsque la droite qui les joint passe par S.

Si le point M se déplace d'une manière quelconque dans le plan P, le point N se déplace dans le plan Q, et les lignes ainsi décrites par les deux points sont dites *homologues*. Il est évident que la *ligne* NK *homologue d'une droite* MG *est une droite qui coupe l'intersection* EF *des deux plans au même point* I *que la première;* car, lorsque M décrit les droites GI, la droite SM reste dans le plan SGI; par suite le point N se meut sur l'intersection du plan Q et du plan SGI; il décrit donc une droite KI passant par le point I qui est commun aux trois plans P, Q, SGI.

Ces propriétés subsistent quand on projette tout le système sur un plan quelconque. Les deux figures, projections de celles qui sont contenues dans les plans P et Q, sont telles que les droites qui joignent les points homologues m et n passent par un point fixe s projection de S, et que les droites homologues mg, nk se coupent sur une droite fixe ef, projection de l'intersection EF du plan P et Q.

Nous allons voir que cette remarque bien simple permet de tracer aisément la section plane d'une pyramide dès qu'on connaît, soit un point de la section et l'intersection du plan sécant et du plan de la base, soit trois points de la section.

169. Considérons une pyramide $sabcd$ (Pl. XX, fig. 166); s est la projection horizontale du sommet, et $abcd$ la projection horizontale de la base; ef est la projection de l'intersection du plan de la base et du plan sécant; enfin a_1 est la projection d'un point de la section; on demande la projection de cette section.

Cherchons, par exemple, le sommet de la section qui est sur l'arête SC. La droite homologue de ac doit rencontrer ef au même point α que ac; dans l'intersection de sc et de αa_1 donne la projection c_1 du point demandé. — On opère de même pour les autres arêtes.

Soit, en second lieu, $abcde$ la projection horizontale d'un polygone plan qui est la base d'une pyramide dont le sommet est projeté en s; on donne les projections a_1, b_1, c_1, de trois sommets de la section et l'on demande d'achever la projection horizontale de cette section (fig. 167).

Cherchons, par exemple, le sommet qui est sur l'arête SD. La droite homologue de b_1d_1 est bd; or bd coupant ac en δ, b_1d_1 doit passer par le point δ_1 homologue de δ; ce point δ_1 est à l'intersection de a_1c_1 et de $s\delta$; donc en joignant b_1 à δ_1 et prenant la rencontre de cette droite avec sd, on a la projection horizontale d_1 du sommet demandé. On trouve e_1 d'une manière analogue.

On peut encore combiner les tracés indiqués dans les deux exemples qui précèdent; ainsi dans le premier exemple, dès qu'on a trouvé à l'aide de la droite ef deux points de la section, on peut ne plus se servir de cette droite et employer le tracé du second exemple fondé sur l'emploi du point donné et des deux points déjà obtenus.

170. Enfin les constructions précédentes s'appliquent l'une et l'autre aux sections planes des prismes, et même avec plus de facilité, car les droites qui joignent les points homologues, au lieu de converger en un même point, sont alors parallèles aux génératrices du prisme, et l'on sait qu'au point de vue graphique, il est beaucoup plus simple de mener des parallèles que des droites concourantes.

Pour offrir un exemple relatif aux prismes, soit donnée (Pl. XXI, fig. 168) la projection horizontale $abcd$ d'une section plane d'un prisme dont on donne en outre trois sommets $a_5b_5c_0$ d'une seconde section plane: on propose de compléter le projection horizontale de ce tronc de prisme. Tout revient à trouver le sommet d_3; or b_5d_5 doit couper d_5c_5 en un point δ_5 homologue du point δ où bd rencontre ac; on obtient δ_5 en menant par δ la parallèle $\delta\delta_0$ aux projections des arêtes du prisme jusqu'à sa rencontre avec a_5c_5; la droite b_5d_5, coupe l'arête dd_5 au point cherché.

Intersection d'une droite et d'un polyèdre.

171. Pour trouver les points où une droite D rencontre la surface d'un polyèdre quelconque P, on mène un plan par la droite et l'on prend les points de rencontre de cette droite et de la section faite dans le polyèdre par le plan auxiliaire.

Le choix du plan auxiliaire dépend de la nature du polyèdre, il sera souvent avantageux de prendre l'un des plans projetants de la droite. Toutefois si le polyèdre est une pyramide, il convient de choisir pour plan auxiliaire le plan passant par la droite D et par le sommet de la pyramide. Ce plan coupera la pyramide suivant une droite située dans le plan de la base et en outre suivant les génératrices qui joignent au sommet les points où cette droite rencontre le contour de la base (*). — Si le polyèdre est un prisme, on prendra pour plan auxiliaire le plan mené par la droite D parallèlement aux arêtes du prisme.

Intersection de deux polyèdres.

172. Le problème de l'intersection de deux polyèdres P et P′ se décompose en deux parties : 1° trouver un premier côté de l'intersection ; 2° connaissant un côté, trouver le côté qui le suit dans un sens donné. Voici les solutions de ces deux questions :

1° Pour obtenir un premier côté de l'intersection, on cherche la droite D commune aux plans d'une face F du polyèdre P et d'une face F′ du polyèdre P′. Si cette droite n'a aucune partie comprise à la fois dans l'intérieur des deux polygones F et F′, comme cela arrive dans les figures 173, 174, 175 de la Pl. XXII, l'opération qu'on vient de faire est inutile, et il faut recommencer jusqu'à ce qu'on tombe sur deux faces F_1 et F'_1, qui présentent l'une des dispositions des figures 177 et 178 de la planche XXII, c'est-à-dire, telles que l'intersection D_1 de leurs plans ait une partie AB située à la fois dans l'intérieur des deux polygones F_1 et F'_1. Ce segment commun AB sera un côté de l'intersection des deux polyèdres, et ses extrémités A et B seront deux sommets consécutifs.

(*) On appelle *génératrice* d'une pyramide toute droite passant par le sommet de la pyramide et s'appuyant sur le contour de la base. On reserve le nom d'*arêtes* aux génératrices qui passent par les sommets de la base.

2° Soit MN un côté connu de l'intersection (fig. **172**, Pl. XXII); il s'agit d'obtenir le côté NR qui le suit et qui part du point N.

Le côté NR appartient à une face φ du polyèdre P et à une face φ' du polyèdre P'. D'ailleurs le point N est sur une arête de l'un des deux polyèdres, par exemple sur une arête Nα du polyèdre P. Soit φ_1 la face de ce polyèdre P qui est adjacente à φ suivant l'arête Nα ; le côté cherché NR appartiendra aux deux faces φ_1 et φ' ; on cherchera l'intersection des plans de ces deux faces, intersection dont on a déjà un premier point N et dont il suffira de déterminer un second point ; la partie NR de cette droite qui sera située à la fois dans l'intérieur des deux polygones φ_1 et φ' sera le côté demandé, et la seconde extrémité R de ce segment sera le sommet suivant de l'intersection des deux polyèdres.

L'application répétée de ce second principe permettra d'obtenir les côtés successifs de l'intersection, après qu'on aura trouvé un premier côté par l'application du premier principe ; on continuera jusqu'à ce qu'on revienne au point de départ. On aura alors obtenu une ligne polygonale généralement gauche qui fera partie de l'intersection des deux polyèdres. Cette intersection se composera d'une ou de plusieurs lignes de ce genre suivant qu'il y aura *arrachement* ou *pénétration*.

173. La recherche du premier côté exige que l'on construise l'intersection complète de deux plans. Chacun des autres côtés n'exige ensuite que la construction d'un point de l'intersection de deux plans.

Ces intersections de plans entraîneront l'emploi de *plans auxiliaires* (n° 106) qu'il faudra choisir convenablement dans chaque cas de manière à ne pas charger le dessin d'une multitude de lignes qui le rendraient illisible et exposeraient l'opérateur à de fréquentes méprises. — Dans le cas de deux pyramides, on fera passer tous les plans auxiliaires par la droite qui joint les sommets des deux corps ; dans le cas d'un prisme et d'une pyramide, on fera passer les plans auxiliaires par la droite menée du sommet de la pyramide parallèlement aux arêtes du prisme. Enfin pour deux prismes, on emploiera des plans auxiliaires parallèles à la fois aux arêtes de l'un et de l'autre prisme.

Premier exemple. — Intersection de deux prismes.

174. La figure 169 (Pl. XXII) est relative à l'intersection d'un prisme droit et d'un prisme oblique dont les bases *mnpq*, *abd* sont dans le plan horizontal.

Les arêtes du premier prisme étant verticales, les plans auxiliaires employés seront verticaux ; ils seront parallèles aux plans qui projettent horizontalement les génératrices du prisme oblique ; leurs traces horizontales seront parallèles à *aa*.

Cherchons la droite commune aux plans des deux faces [*ab*] et [*mq*] ; (nous désignons pour plus de rapidité par [*ab*] la face dont la trace horizontale est *ab*). Les plans auxiliaires aa_1 et bb_1 donnent deux points $(\alpha_1\ \alpha')$ $(\beta_1\beta')$ de cette droite, et le segment $(\alpha\alpha', \alpha'\beta')$ est précisément la partie commune aux deux faces [*ab*], [*mq*] ; c'est donc un premier côté de l'intersection,

Le sommet $(\beta_1\beta')$ est sur l'arête bb_1 du prisme oblique ; le côté suivant de l'intersection appartient donc aux faces [*bd*] et [*mq*] ; le plan auxiliaire dd_1 donne un point $(\delta_1\delta')$ de la droite commune à ces deux faces, et $(\beta\delta, \beta'\delta')$ est le second côté de l'intersection.

Le sommet $(\delta_1\delta')$ étant sur l'arête dd_1 du prisme oblique le côté suivant de l'intersection appartient aux deux faces [*ad*] et [*mq*]; ce côté est donc $(\beta\alpha, \delta'\alpha')$.

On est ainsi revenu au point de départ après avoir trouvé une première ligne $(\alpha\beta\delta, \alpha'\beta'\delta')$ située tout entière dans la face [mq] du prisme droit. C'est par ce triangle ($\alpha\beta\delta$, $\alpha'\beta'\delta'$) que le prisme oblique entre dans le prisme droit ; il en sort suivant une autre ligne polygonale que nous allons chercher.

Les plans auxiliaires aa_1, bb_1 donnent un premier côté ($\alpha_1\beta_1$, $\alpha_1'\beta_1'$) de la ligne de sortie qui est commun aux faces [ab] et [np]. Le côté suivant appartient aux faces [bd] et [np] puisque le sommet (β_1,β_1') est sur l'arête bb_1 du prisme oblique ; le plan auxiliaire pc donne le sommet suivant (γ_1, γ_1'), et comme ce troisième sommet est situé sur l'arête ($p_1p'p_1'$) du prisme droit, le troisième côté de la ligne de sortie appartiendra aux faces [bd] et [pq] ; le plan auxiliaire dd_1 donne le quatrième sommet (δ_1,δ_1') qui est sur l'arête dd_1 du prisme oblique ; on considère alors les faces [da] et [pq] et l'on obtient le cinquième sommet (ε_1,ε'_1) le plan auxiliaire pe ; ce cinquième sommet étant sur l'arête ($p_1p'p'_1$) du prisme droit, le côté suivant appartient aux faces [ad] et [pn] ; c'est donc ($\varepsilon_1\alpha_1$ $\delta'_1\alpha'_1$) et l'on revient au point de départ ($\alpha_1\alpha'_1$). La ligne de sortie est donc un pentagone gauche ($\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1\varepsilon_1$) ($\alpha'_1\beta'_1\gamma'_1\delta'_1\varepsilon'_1$) situé sur les faces [$np$] et [$pq$] du prisme droit.

Dans l'épure (fig. 169) on a représenté la prisme droit comme s'il existait seul en supprimant la partie enlevée par le passage du prisme oblique. — La figure 170 est le développement de la surface latérale de ce prisme droit ; on y a marqué la transformée du triangle d'entrée et du pentagone de sortie. — Enfin on a représenté dans la figure 171 le solide *commun* au prisme droit et au prisme oblique.

Deuxième Exemple. — Intersection d'un prisme et d'une pyramide.

175. La figure 176 de la pl. XXII représente l'intersection d'une pyramide pentagonale et d'un prisme triangulaire dont les bases *abcde*, *mnp* reposent sur le plan horizontal.

Les plans auxiliaires employés passent par la droite $(s\theta, s'\theta')$ menée par le sommet de la pyramide parallèlement aux arêtes du prisme ; leurs traces horizontales sont donc des droites issues du point θ trace de cette parallèle.

Cherchons d'abord la proportion horizontale de l'intersection de ces deux polyèdres.

En coupant les deux faces [*ab*] et [*mn*] par les deux plans auxiliaires θra, θmf, on obtient un premier côté $\alpha\beta$ de l'intersection. Le point β étant sur l'arête $m\ \beta$ du prisme, le côté suivant de l'intersection appartient aux faces [*ab*] et [*mp*] ; le plan auxiliaire θub donne l'extrémité γ de ce côté. Toutefois il se présente ici une circonstance particulière que nous devons signaler : la projection horizontale du point de l'intersection fourni par un plan auxiliaire quelconque s'obtient en général à l'aide de constructions faites sur la projection horizontale seule ; ainsi le point β situé dans le plan auxiliaire θmf a été trouvé immédiament par la rencontre des droites mm_1 sf projections horizontales des génératrices du prisme et de la pyramide qui ont respectivement m et f pour traces ; pour le plan θub que nous considérons actuellement, les génétrices qui ont pour trace u et b ont la même projection horizontale ub, et pour avoir la projection horizontale γ de leur point commun il faut recourir à leurs projections verticales $u'u'$, $s'b'$; la rencontre de ces droites donne le point γ' qui par une ligne de rappel donne à son tour le point γ.

Le troisième côté $\gamma\delta$ de l'intersection appartient aux faces [*bc*] et [*mp*] ; son extrémité δ est fournie par le plan auxiliaire $\theta\mu g$.

Le quatrième côté $\delta\varepsilon$ est commun aux faces [*bc*] et [*pn*] ; le plan auxiliaire $\theta\nu b$ donne l'extrémité ε, que l'on obtient en opérant comme nous l'avons expliqué pour le point γ

c'est-à-dire en passant par la projection verticale ε'.

Cinquième côté $\varepsilon\varphi$; faces [*ba*] et [*pn*] ; plan auxiliaire θta.

Sixième côté $\varphi\lambda$; faces [*ae*] et [*pn*] ; plan auxiliaire θve.

Septième côté $\lambda\mu$; faces [*de*] et [*pn*] ; plan auxiliaire θpk.

Huitième côté $\mu\nu$; faces [*de*] et [*pm*] ; plan auxiliaire θue.

Neuvième côté $\nu\omega$; faces [*ea*] et [*pm*] ; plan auxiliaire θmi.

Dixième côté $\omega\alpha$; faces [*ea*] et [*mn*] ; plan auxiliaire θra.

La projection horizontale $\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon\varphi\mu\nu\omega\alpha$ étant trouvée, on passe à la projection verticale en reportant par des lignes de rappel les sommets sur les projections verticales des arêtes correspondantes du prisme ou de la pyramide. Il n'y a à faire cette opération que pour les sommets $\alpha\beta\delta\varphi\mu\omega$, car on a déjà les projections verticales $\gamma', \varepsilon', \lambda', \nu'$ des quatre autres. — Pour le sommet (α, α') la ligne de rappel et la projection verticale de l'arête $(as, a's')$ se confondent, il faut donc prendre le point de rencontre α' de la ligne de rappel du point α, avec la projection verticale $\tau'\tau'_1$ de la génératrice correspondante du prisme. Il en est de même pour le point φ'.

On a représenté la pyramide, comme si elle existait seule en supprimant l'entaille faite par le prisme.

Troisième exemple. — Intersection de deux pyramides.

176. Comme exemple d'intersection de deux pyramides, nous chercherons l'ombre portée dans un *trou de loup* supposé éclairé par un point lumineux. En terme de fortifications, on nomme trous de loup des puits ayant la forme d'un tronc de cône ou d'un tronc de pyramide dont la grande base est sur le sol, tandis que la petite base est en dessous et forme le fond de l'excavation. On place ordinairement ces trous en avant du fossé sur la capitale des ouvrages et on les dispose sur trois rangs en quinconce, à environ $3^m,20$ de distance de centre en centre. Pour les terres moyennes, on donne à ces puits les dimensions suivantes : diamètre supérieur, 2 mètres ; diamètre inférieur $0^m,83$; hauteur $1^m,17$. Les terres retirées sont accumulées dans les intervalles de ces excavations, et on plante un piquet au centre de chaque trou de loup.

Nous supposerons ici que le trou de loup ait la forme d'un tronc de pyramide renversée (Pl. XXIII, fig. 179); la base supérieure est un hexagone régulier $abcdef$ situé dans le plan horizontal ; la base inférieure est une hexagone semblable $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ situé dans un plan horizontal inférieur $h'h''$; (s,s') est le sommet de la pyramide à laquelle le tronc appartient. Soit enfin (o,o') le point lumineux qui éclaire le puits ; le rayon lumineux en glissant sur le contour de l'ouverture $abcdef$ engendrera une pyramide dont l'intersection avec la pyramide primitive sera la ligne qui sépare la partie éclairée de la partie obscure.

Pour trouver l'intersection de ces deux pyramides qui ont l'hexagone ABCDEF pour base commune et pour sommets respectifs les points (o,o'),(s,s'), on emploie des plans auxiliaires passant par la droite $(os,o's')$; leurs traces horizontales passent par la trace horizontale θ de cette droite.

Il est clair que lorsque le rayon lumineux glisse sur AFEDC il ne porte pas ombre dans l'intérieur du trou ; il suffit donc de faire glisser ce rayon sur les deux côtés AB et BC.

La face OAB de la pyramide d'ombre et la face A_1AFF_1 des puits ont déjà un point commun A; le plan auxiliaire θf donne un second point commun dont la projection horizontale φ est à la rencontre de ai et de sf ; une ligne de rappel donne le point φ' sur $s'f'$; on a donc ainsi un premier côté $(a\varphi,a'\varphi')$ de l'ombre portée.

Le côté suivant $(\varphi\varepsilon,\varphi'\varepsilon')$ est commun au plan d'ombre OAB et à la face FF_1E_1E du trou ; le sommet $(\varepsilon,\varepsilon')$ est donné par le plan auxiliaire θbc ; ce plan coupe la pyramide d'ombre et la pyramide qui forme la surface du trou suivant les génératrices (ob, $o'b'$), (se, $s'e'$), dont les projections verticales se croisent en ε'; la ligne de rappel de ε' donne ε.

Il faudrait maintenant faire glisser le rayon lumineux sur le côté BC. Mais on voit, par la symétrie de la figure, et sans faire de nouvelles constructions, que la seconde partie de l'ombre portée est la ligne brisée $\varepsilon\varphi_1 c$, symétrique de $\varepsilon\varphi a$ par rapport à os. Il suffit donc de prolonger la ligne de rappel $\varphi'\varphi$ jusqu'à sa rencontre avec sd pour avoir le point φ_1, puis de joindre ce point à ε et à d.

L'ombre portée dans le trou de loup est donc ($a\varphi\varepsilon\varphi_1 c$, $a'\varphi'\varepsilon'$).

Ombres d'une cheminée sur un toit.

177. La recherche de l'ombre portée par un polyèdre P sur un autre polyèdre Q revient à la recherche de l'intersection du polyèdre Q avec la pyramide (ou le prisme) d'ombre qu'engendre le rayon lumineux en glissant sur la séparative du polyèdre P.

Après les détails que nous venons de donner sur les intersections de polyèdres, deux exemples suffiront pour mettre le lecteur en état de traiter sans difficulté toutes les questions d'ombre portée relatives aux corps polyédriques.

Soit d'abord proposé de trouver les ombres portées sur un toit par une cheminée prismatique que termine supérieurement un bandeau en forme de parallélippède (Pl. XXIV, fig. 181).

Le toit est à deux égouts et sa ligne de faîte ($\tau\tau_1$, τ') est perpendiculaire au plan vertical de projection; le plan de chaque égout est donc perpendiculaire au plan vertical; LT' est la trace verticale de celui qui porte la cheminée.

Le corps de la cheminée est un prisme droit dont la section droite projetée horizontalement en vraie grandeur est un rectangle $mgpx$ qui a ses côtés alternativement parallèles et perpendiculaires à la ligne de terre ; le bandeau qui le surmonte et qui le déborde est projeté horizontalement suivant le rectangle $acdf$ dont les côtés sont parallèles et équidistants de ceux du rectangle $gpxm$.

Le croquis (fig. 182) montre clairement cette disposition ; on voit, d'après la direction des rayons lumineux, que la séparative est formée, sur le bandeau par les arêtes AB,BC,CD,DE,EF,FA, et sur le corps de la cheminée par les deux arêtes verticales opposées PP_1,MM_1.

Cherchons d'abord l'ombre qui serait portée sur le toit par le bandeau si ce bandeau existait seul. Cette ombre serait l'hexagone $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$ dont les sommets s'obtiennent immédiatement en menant les rayons lumineux par les sommets de la séparative et cherchant les points où ces rayons percent le plan du toit. Par exemple, pour avoir le point a_1 on mène par le sommet (a,a') de la séparative du bandeau la parallèle $(aa_1,a'a'_1)$ aux rayons de lumière ; l'intersection de $a'a'_1$ avec LT' est la projection verticale a_1 du point où cette parallèle perce le plan du toit, puisque (n° 40) ce plan est perpendiculaire au plan vertical ; la ligne de rappel de a'_1 donne le point a par sa rencontre avec aa_1. — Il y a d'ailleurs des vérifications ; les côtés a_1b_1 et e_1d_1 sont égaux et parallèles ; les côtés b_1c_1 et e_1f_1 sont égaux et parallèles à bc.

Quant à l'ombre portée sur le toit sur le corps de la cheminée, elle se compose des deux droites $m\mu$, $p\pi$ parallèles aux rayons lumineux ; en effet, en glissant sur les arêtes verticales MM_1,PP_1 le rayon lumineux engendre deux plans verticaux dont mp et $p\pi$ sont les traces horizontales ; les intersections de ces plans avec le toit se projettent donc horizontalement sur ces lignes ; il faut d'ailleurs arrêter ces droites aux points n_1 et q_1 où elles rencontrent les côtés e_1f_1,a_1f_1 de l'hexagone $a_1b_1c_1d_1e_1f_1$, car à partir de là l'ombre portée par la cheminée est noyée dans celle du bandeau. On voit en outre que les portions n_1f_1 et f_1q_1 du contour de l'ombre du bandeau doivent être supprimées ; enfin les droites mn_1, pq_1 commencent par être invisibles, et on doit les tracer en points ronds jusqu'à leur sortie de la projection du bandeau.

Au point de croisement q_1 des ombres $p\pi$, s_1a_1 portées par l'arête PP_1 de la cheminée et l'arête AF du bandeau répond un rayon lumineux $(rq_1, r'q_1')$ qui s'appuie respectivement sur AF et PP_1 aux points (r,r') et (q_1q'). Le point (r,r') divise donc AF en deux parties AR et RF dont la première AF porte ombre sur le toit, tandis que la seconde RF porte ombre sur la face antérieure de la cheminée. Cette ombre $s'q'$ est d'ailleurs parallèle à AF ; ses points extrêmes sont le point q' et le point s' où le rayon (fs, fs') perce le plan vertical gp. Le rayon lumineux glissant ensuite sur FE porte ombre sur la face antérieure et sur la face de gauche de la cheminée. L'ombre sur la face de gauche est parallèle à FE, c'est-à-dire perpendiculaire au plan vertical de projection ; elle est donc projetée tout entière au point g' où le rayon $(hh, g'g')$ rencontre l'arête verticale qui a son pied en g. Quant à l'ombre portée par $(hf, h'f')$ sur la face antérieure, c'est la droite $g's'$.

Tout cela se comprend aisément à condition toutefois de ne pas perdre de vue les deux principes donnés au n° 55, et qui sont d'un emploi constant dans ce genre d'exercices.

Ombre d'un perron.

178. Le perron (Pl. XXIII, fig. 180) est donné par une élévation (E) et une coupe (C). Le plan de l'élévation est parallèle au mur vertical dans lequel est pratiquée la porte à laquelle le perron donne accès. Le perron se compose de quatre marches dont la plus élevée ou *marche palière* est plus large que les précédentes, et de deux petits murs latéraux dans lesquels les marches sont encastrées. Ces murs latéraux dont les faces verticales sont perpendiculaires aux arêtes des marches sont terminés supérieurement par trois faces planes dont les deux extrêmes cb,ag, sont horizontales, tandis que la face intermédiaire ba est un plan incliné. La coupe est faite normalement aux arêtes des marches.

Il y a trois séparatives :

1° $(hcbag,h'a')$ séparative sur le mur latéral de droite.

2° $(kcbag,k'_1a'_1)$ séparative sur le mur latéral de gauche.

3° $(\alpha e,\alpha'_1e'e'')$ séparative sur la porte.

La recherche de l'ombre portée se décompose donc en trois parties :

1° Ombre portée par la première séparative sur le mur. Cette ombre $a'\alpha'\lambda'$ s'obtient en prenant les traces (α,α'), (β,β') sur le mur des rayons lumineux passant par les points (a,a'), (b,b'); la droite $a'\alpha'$, ombre de (ag,a'), est parallèle à R'.

2° Ombre portée par la deuxième séparative sur les marches et sur le mur vertical ; cette ombre est la ligne brisée $a'_1\alpha''p'q'r's'r''\delta'$. Voici comment on trouve ses divers côtés : — $a'_1\alpha''$ ombre de (ag,a') sur le mur est parallèle à R' — $p'q'$ ombre portée par $(ab,a'b')$ sur la première contre-marche (*) est menée par a'_1 parallèlement à $\alpha'\beta'$ — $r's'$ ombre de $(bc,b'_,)$ sur la deuxième contre-marche est menée par b'_1 parallèlement à R' — $\delta'\delta''$ ombre de $(cd,\ b'_1d'_1)$ sur la troisième contre-marche est verticale ; son point de départ δ' est l'ombre du point (d,d') qu'on trouve en menant par δ une parallèle à R.

3° Ombre dans l'intérieur de la porte. Elle se compose de la verticale $\varepsilon'\varepsilon'''$, ombre portée par l'arête verticale $(\alpha e,\alpha'_1e')$, et de l'horizontale $\varepsilon'\varepsilon''$, ombre portée par l'arête $(e,e'e'')$. Il suffit pour tracer ces deux lignes de construire

(*) Des deux faces apparentes d'une marche, l'une est verticale, l'autre sur laquelle on pose le pied est horizontale; on nomme *contre-marche* la face verticale.

leur point commun ε', c'est-à-dire l'intersection du rayon lumineux $(e\varepsilon, e'\varepsilon')$ avec le fond de la porte.

Applications à la charpente. — Moises. — Trait de Jupiter.

179. Nous terminerons ces études sur les polyèdres par quelques exemples de représentation de corps solides empruntés à la charpente et à la coupe des pierres et un peu plus compliqués que ceux qui font l'objet du chapitre V.

La figure 183 de la planche XXIV, représente deux pièces A et B assemblées à tenon et à mortaise, et maintenues par deux autres pièces M et N qu'on nomme *moises*. Dans le langage des anciens charpentiers, le mot *moise* signifiait la moitié d'une poutre fendue dans le sens de sa longueur, et *moiser* deux pièces c'était les saisir en deux demi-poutres ou *moises* serrées par des boulons. Ainsi les moises sont deux pièces jumelles qui resserrent entre elles plusieurs autres pièces dont les axes sont situés dans un même plan. Ce système, surtout quand les moises sont entaillées sur le passage des pièces qu'elles relient, forme un assemblage très-solide ; dans notre figure on peut considérer les pièces A et B comme le tirant et l'arbalétrier d'une ferme maintenus par deux moises verticales entaillées.

La figure 184 est une projection sur le plan des axes ; les projections des deux moises s'y confondent ; on a donné quartier à ces deux pièces en M' et N'. La perspective cavalière (fig. 183) permettra au lecteur de lire sans peine les figures en projection, surtout s'il a bien compris l'assemblage oblique à mi-bois (nº 100).

Quand on ne craint pas de trop affaiblir les pièces principales A et B, on peut entailler aussi les deux pièces à leur passage entre les moises.

180. Comme on ne possède pas toujours des pièces de bois de toute longueur, on forme souvent une pièce ayant la longueur que l'on désire en réunissant deux pièces bout à bout, de manière que leurs axes soient dans le prolongement l'un de l'autre. Les assemblages de ce genre prennent le nom d'*entures ;* il existe une grande variété d'entures ; nous choisirons comme exemple le *trait de Jupiter* qui est le meilleur mode d'enter deux pièces destinées à supporter une traction longitudinale. Ce trait est représenté en perspective dans la figure 185 (Pl. XXV), où l'on voit les deux pièces M et N séparées et prêtes à être mises en joint. Le joint est une surface brisée formée par des plans ABA_1B_1, BB_1CC_1, CC_1, DD_1, DD_1EE_1, EE_1FF_1 perpendiculaires aux faces de *parement*, c'est-à-dire à la face antérieure et à la face postérieure de la pièce ; en projection sur un plan parallèle à ces faces (fig. 186) le joint de la pièce M' est la ligne brisée $a'b'c'd'e'f'$; c'est la ressemblance de cette ligne en zig-zag avec les traits de la foudre qui a valu à cet assemblage le nom de trait de Jupiter. Le joint de la pièce N, qui sur la fig. 186 est juxtaposée avec M, est projeté sur la ligne $a'b'h'g'e'f'$; il reste donc un intervalle vide dans lequel on insère de force une clef, qui pressant les abouts les uns contre les autres, s'oppose à ce que les pièces se séparent et cèdent à la traction longitudinale à laquelle elles sont soumises.

La figure 187 est une projection sur un plan parallèle à la face supérieure ; elle se lit sans difficulté ; pour plus de clarté, on n'y a représenté que la pièce M.

Enfin nous avons dessiné (fig. 188) le même assemblage pour deux pièces *délardées*, c'est-à-dire pour deux pièces qui ont pour section droite non plus un rectangle mais un parallélogramme. Nous n'avons représenté que l'une des pièces ; il y a trois projections, la projection horizontale H c'est-à-dire faite sur un plan parallèle à la face supérieure, et deux projections verticales, l'une V perpendiculaire, l'autre V_1 parallèle aux grandes arêtes de la pièce ; on commence par tracer sur le plan V la section droite $xyzu$ de la pièce, d'où l'on déduit immédiatement les projections sur les plans H et V_1 des longues arêtes; on trace alors le joint $a'b'c'd'e'f'$ sur la projection V_1 ; à chaque sommet de la ligne brisée $a'b'c'd'e'f'$ répond une arête perpendiculaire au plan vertical et dont on trouve la projection horizontale de la manière suivante. Soit, par exemple, le sommet b'; pour avoir les points b_1 et b où l'arête corespondante perce la face fxu et son opposée, on coupe par le plan horizontal $b'\beta'$; $\beta''b''b''_1$ est la trace du plan sur le plan de projection V ; par suite ce plan horizontal donne dans la face fxu et dans son opposée les droites βb, $\beta_1 b_1$, sur lesquelles sont les extrémités cherchées b_1 et b, de l'arête (b', bb_1).

Application à la coupe des pierres. — Encoignure formée par deux murs en talus.

181. Pour compléter ce que nous avons dit au chapitre V sur les murs en pierre de taille, il nous reste à indiquer comment on appareille deux murs qui se rencontrent.

Quand deux murs se recontrent pour former une encoignure, leurs assises horizontales doivent se correspondre ; en d'autres termes, chaque assise horizontale doit régner dans toute l'étendue des deux murs, afin que le tassement des diverses parties de l'édifice soit uniforme.

Considérons d'abord deux murs à faces verticales. Si l'angle aob de leurs parements extérieurs est droit ou obtus, on disposera les pierres des diverses assises comme le montre la figure 189 (Pl. XXV), c'est-à-dire qu'on dirigera la longueur des pierres alternativement suivant les faces de l'un et l'autre mur. Si l'angle des parements est trop aigu, on supprimera cet angle en lui susbtituant un pan coupé vertical *dc*, comme l'indique la figure 190 qui est une projection horizontale. On a marqué sur cette figure la disposition des pierres de l'assise inférieure, et sur la figure 191 la disposition des pierres de l'assise placée immédiatement au-dessus.

182. Lorsque les murs sont en talus, on peut adopter les appareils précédents pourvu que les talus soient très-faibles. Mais dès que l'inclinaison est un peu forte, il faut appareiller chaque mur conformément aux prescriptions du n° 93, afin de supprimer les angles aigus des lits horizontaux et des faces inclinées. Voici comment on établit alors la concordance entre les appareils des deux murs.

Prenons pour plan horizontal de projection le plan du sol, et pour plans verticaux les plans LT, L_1T_1 respectivement perpendiculaires aux traces horizontales αx et αy des parements extérieurs des deux murs M et N. On commence par tracer sur le plan vertical LT (fig. 192, Pl. XXVI) l'appareil du mur M d'après les règles exposées au n° 93 ; les assises succesives sont A′B′, C′D′E′, F′G′H′,... ; la première est entièrement horizontale ; les autres sont brisées, et chacune d'elles se compose d'une partie horizontale et d'une petite partie dont le plan est normal à la ligne de plus grande pente A′P′ du talus. Enfin, à la partie inférieure, pour supprimer l'angle aigu R′A′B′, on substitue à A′R′ la ligne brisée A′Q′R′ aux côtés de laquelle répondent deux petites faces, l'une horizontale, l'autre verticale.

Pour tracer sur le plan vertical L_1T_1 l'appareil du second mur N, on mène d'abord la ligne de plus grande pente A″P″ faisant avec L_1T_1, un angle égal au talus de ce second mur ; puis à l'aide de deux horizontales de même côté (P′, PΠ), (P″,PΠ) on détermine (n° 111) la projection horizontale $\alpha\pi$ de l'intersection des deux talus. Les horizontales des points R′,C′,F′ du premier talus coupent le plan vertical $\alpha\pi$ aux points ρ, γ, φ ; par ces points on mène des parallèles à αy ; ce sont les horizontales correspondantes du second talus, en sorte que les lignes de rappel des points R, C, F, donnent les points R″, C″, F″, homologues de R′, C′, F′. Par C″ et F″ on mène des perpendiculaires à A″P″, qu'on arrête en D″ et G″ de façon que les parallèles à αy menées par D″ et G″ coupent respectivement sur $\alpha\pi$ les parallèles à αx menées par D′ et G′. Le reste s'achève alors par des parallèles et des perpendiculaires à L, T.

En projection horizontale, nous avons dessiné les deux pierres d'encoignure qui appartiennent l'une à la première, l'autre à la deuxième assise, en les ponctuant comme s'il n'en existait pas d'autres. La pierre inférieure s'étend d'un côté jusqu'au plan vertical uv et de l'autre jusqu'au plan vertical $u_, v_,$; les faces uv et wv sont les deux têtes de ce voussoir ; les deux têtes de la pierre supérieure sont dans les plans verticaux wz et $w_, z_,$.

La figure 193 est une perspective cavalière de la pierre inférieure. On a déjà en vraie grandeur sur l'épure la plupart des faces de cette pierre ; les trois faces horizontales sont en vraie grandeur sur le plan, et les panneaux des deux têtes se trouvent sur les projections verticales LT, L_1T_1. Pour ne rien laisser à désirer, nous avons construit (fig. 194) les panneaux des deux faces inclinées (C′D′, $cd\delta\gamma$), (C′R′, $c\gamma\rho r$) ; ce sont des trapèzes rectangles dont les hauteurs sont égales à C′D′ et à C′R′, et dont les côtés parallèles sont égaux à $d\delta$, $c\gamma$, $r\rho$.

QUESTIONS PROPOSÉES.

1. Dessiner la projection du solide commun au prisme et à la pyramide de la figure 176 (nº 184) ; faire une perspective cavalière de la pyramide entaillée.

2. Faire une perspective cavalière de l'encoignure à pan coupé étudiée au n° 190 (fig. 190 et 191).

3. Chercher l'ombre d'une pyramide sur des marches d'escalier.

4. Chercher l'ombre d'une croix sur une encoignure formée par deux murs verticaux.

5. Un prisme droit a pour base un hexagone régulier situé dans le plan horizontal. On prend trois points M,N,P à volonté sur trois des arêtes latérales; on demande : 1° les projections du prisme tronqué compris entre le plan horizontal et le plan M N P ; 2° l'ombre portée par ce tronc de prisme par les plans de projection, en supposant le tronc éclairé par un point lumineux situé sur l'arête latérale qui passe par M, à une hauteur égale au double de celle du point M au-dessus du plan horizontal.

6. Une pyramide repose par sa base sur le plan horizontal ; on donne cette base et les longueurs de trois arêtes latérales SM,SN, SP; on demande de déterminer la projection horizontale et la cote du sommet.

On connaît les trois côtés de chacun des triangles SMN, SNP ; on peut donc rabattre ces triangle autour de MN et de NP ; on aura ainsi deux rabattements S_1 et s_2 du sommet, d'où l'on déduira facilement la projection horizontale et la cote de ce point.]

7. — Trouver l'intersection du prisme et de la pyramide definis par la fig. 195 (Pl. XXVII), en amplifiant préalablement cette figure dans le rapport de 1 à 3; on représentera finalement le prisme comme s'il existait seul, en supprimant la partie de ce corps qui est comprise dans la pyramide ; on fera à part les projections du solide commun.

[Pour faciliter la tâche de l'opérateur, nous donnons (fig. 200 Pl. XXVIII) l'épure toute faite, mais débarrassée des lignes de construction.]

8. Même question pour les deux corps définis par la fig. 196 (Pl. XXVII); nous donnons encore (fig. 201, Pl. XXIX) l'épure toute faite, mais sans lignes de construction.

9. Trouver l'intersection des deux prismes définis par la figure 197 (Pl. XXVII), en amplifiant préalablement cette figure dans le rapport de 1 à 4. — On représentera finalement les deux corps en supposant qu'ils existent simultanément, et on les limitera l'un et l'autre par une section droite ; on fera à part les projections du solide commun.

10. Même question pour les deux prismes définis par la figure 198 (Pl. XXVII). — (Ces deux prismes ont deux plans rasants communs.)

11. Même question pour le prisme et la pyramide définis par la figure 199 (Pl. XXVII). — (Le prisme et la pyramide ont un plan rasant commun.)

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION

CHAPITRE I

REPRÉSENTATION DU POINT.

CHAPITRE II

REPRÉSENTATION DE LA LIGNE DROITE.

CHAPITRE III

APPLICATIONS.

CHAPITRE IV

REPRÉSENTATION DU PLAN.

CHAPITRE V

APPLICATIONS.

CHAPITRE VI

INTERSECTIONS DES DROITES ET DES PLANS.

CHAPITRE VII

RABATTEMENTS ET ROTATIONS.

CHAPITRE VIII

PROBLÈMES RELATIFS AUX ANGLES ET AUX DISTANCES.

CHAPITRE IX

CERCLE ET SPHÈRE.

CHAPITRE X

POLYÈDRES.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE

Méthode des projections. — Représentation d'un point, d'une droite, d'un plan. — Problèmes sur la ligne droite et sur le plan. — Méthode des rabattements.

Méthode d'enseignement.

Beaucoup d'élèves éprouvent quelque difficulté à se représenter les figures géométriques dans l'espace, à lire dans l'espace comme on dit. Cependant, lire dans l'espace est une faculté indispensable aux industriels et aux ouvriers, et il faut, par tous les moyens possibles, s'efforcer de la développer dans l'esprit des élèves du cours spécial. Le maître de géométrie descriptive emploie donc les plans à charnières et les tiges armées de pointes dont on fait usage au Conservatoire des arts et métiers pour figurer les droites et les plans et rendre palpables leurs positions respectives diverses. Les élèves munis d'appareils semblables, mais en petit, réalisent eux-mêmes la figure proposée : chaque élève ayant terminé sa construction, le professeur leur présente la sienne, sous tous les points de vue, afin d'habituer leurs yeux aux différents aspects sous lesquels elle peut être vue; enfin, supprimant lignes et plans, il dessine sur le tableau la figure matérielle qu'il vient de construire, après s'être assuré que tous les élèves ont bien lu dans l'espace et compris les relations des lignes et des plans. L'enseignement ainsi conduit est plus lent, mais il tient en éveil l'attention des jeunes gens. Cette méthode est, d'ailleurs, indispensable à beaucoup d'entre eux ; les succès des élèves, dans l'étude des rabattements, des projections, de la perspective, de la cosmographie, et dans les travaux qu'ils auront à réaliser un jour, dépendent absolument de la parfaite intelligence de cette première partie du cours, qui est comme l'alphabet de cette lecture d'un ordre plus complexe.

On sait que les données d'une question pratique sont *essentiellement numériques :* ainsi un point est donné par les distances aux deux plans de projection, mesurées et exprimées en mètres et centimètres ; une droite, par deux de ses points cotés, et souvent par un point et les angles qu'elle fait avec les plans de projection, etc. Les élèves doivent donc être excercés de bonne heure à construire *à une échelle* quelconque les données de la question proposée : les amplifications, les réductions, les changements d'échelle, doivent leur être rendus familiers par de nombreux exemples. Chaque problème de *la théorie* a donc son correspondant en *données numériques*, et toutes les épures sont exécutées à une échelle donnée. De plus, comme cet enseignement s'adresse à des jeunes gens peu habitués encore à des considérations abstraites, les yeux doivent venir constamment en aide à l'intelligence : les professeurs proposent donc de nombreux exemples à l'appui des principes, et les objets en relief sont placés en évidence. On insiste beaucoup sur la représentation des corps : les exercices proposés, en effet, sont d'abord utiles en eux-mêmes, puisqu'ils donnent aux élèves les premières notions de charpente ; mais ils ont surtout l'avantage de les habituer à lire la langue des projections et à rétablir les objets dans l'espace. Enfin, on saisit toutes les occasions de présenter des applications simples à la coupe des pierres et à la détermination des ombres.

Représentation d'un point et d'une droite. Tracer les projections d'un cube, d'un prisme, d'une pyramide; quelques assemblages simples de charpente, tels que : assemblage à mi-bois, à tenon et mortaise ; projections d'une ferme de charpente. Représentation d'un plan. Problèmes sur la ligne droite et le plan. Intersection d'une droite et d'un plan. Droites et plans perpendiculaires. Méthode des rabattements. Angle de deux droites, angles de deux plans. Mouvement de rotation autour d'un axe vertical. Applications; intersections d'une sphère et d'un plan, courbe de contact d'une sphère avec un cylindre circonscrit, etc.

Programme.

Cet enseignement doit être surtout pratique, parce qu'il s'adresse à des jeunes gens peu habitués à des considérations abstraites et qui sont destinés à appliquer la géométrie descriptive dans sa simplicité, plutôt qu'à s'en servir, comme les élèves de nos grandes écoles, pour la solution de problèmes difficiles. — Les yeux doivent aider constamment l'intelligence; les professeurs proposent de nombreux exemples à l'appui des principes, et les objets en relief sont placés en évidence dans une position convenablement éclairée. La marche indiquée dans ce programme est lente, mais sûre : les principes ont été gradués avec soin, et les élèves n'abordent de nouveaux sujets que lorsqu'ils sont familiarisés avec les idées sur lesquelles ils ont à s'appuyer. On insiste sur la représentation des corps; les exercices proposés à cet effet sont d'abord utiles en eux-mêmes, puisqu'ils conduisent aux premières notions de charpente; mais ils ont surtout l'avantage d'habituer les élèves à lire facilement la langue des projections et à rétablir les objets dans l'espace. Enfin, toutes les fois que l'occasion se présente, on donne des applications simples et utiles à la coupe des pierres, à la charpente et à la détermination des ombres, en indiquant les cas qui se rencontrent le plus fréquemment et qui peuvent éclairer la théorie.

Objet de la géométrie descriptive. — Méthode des projections. Le point. — La ligne droite. — Le plan.

Représentation d'un point, d'une droite par leurs projections. — Etant données les projections d'un point, d'une droite, en conclure leurs positions dans l'espace et les projeter sur un nouveau plan de projection, perpendiculaire à l'un des deux premiers.

Applications :

1° Trouver les projections d'un cube, d'un prisme, d'une pyramide dont les positions sont données, d'abord sur deux plans rectangulaires, puis sur un nouveau plan vertical, et sur un second plan perpendiculaire au plan vertical.

Pour les deux premiers solides, les dimensions doivent être prises sur les objets en relief et portées sur un croquis fait à main levée; le dessin exact est exécuté d'après ce croquis à une échelle donnée.

2° Dessiner quelques assemblages simples de charpente, tels que : assemblage à mi-bois, assemblage à tenon et mortaise, avec ou sans embrèvement, assemblage à queue d'aronde, moises, etc.

On fait comprendre aux élèves que dessiner la projection verticale d'une pièce de charpente sur un plan parallèle à l'une de ses faces revient à faire tourner la pièce de manière que cette face devienne horizontale et à dessiner alors la projection horizontale; c'est ce qui s'appelle en terme de métier : donner quartier à la pièce.

3° Dessiner les projections d'une ferme de charpente.

Représentation d'un plan : 1° au moyen de lignes polygonales qui le déterminent; exemples tirés des polyèdres déjà construits dans les épures précédentes; 2° au moyen des traces sur les plans de projection, cas particulier où le plan est perpendiculaire à l'un des plans de projection.

Insister sur ce cas et faire remarquer que toute figure située dans ce plan a une de ses projections qui se confond avec une trace du plan; en conclure les projections de l'intersection du plan avec une ligne quelconque déterminée par ses projections.

Applications :

Intersection d'un cube, d'un prisme, d'une pyramide : 1° avec un plan vertical; 2° avec un plan perpendiculaire au plan vertical.

Rabattement du plan autour d'une de ses traces pour déterminer la vraie grandeur de la section.

Problèmes sur la ligne droite.

Rabattement du plan vertical projetant d'une droite. Déterminer la distance de deux points de cette droite. — Prendre sur la droite à partir d'un point donné une longueur donnée. — Angle de la droite avec le plan horizontal.

Répéter ces constructions pour le plan qui projette la droite sur le plan vertical.

Autres problèmes sur la ligne droite.

Mener par un point une parallèle à une droite donnée. — Construire les traces d'une droite donnée par ses deux projections.

Applications :

Déterminer l'ombre portée sur le plan horizontal de projection : 1° par une pyramide triangulaire; 2° par un cube ou un prisme. — Explication des expressions : ombre au soleil, ombre au flambeau.

Problèmes sur le plan.

Construire les traces d'un plan déterminé par trois conditions.

Mener par un point un plan parallèle à un plan donné.

Construire l'intersection de deux plans.

Cas particuliers : 1° l'un des plans est horizontal; 2° l'un des plans est perpendiculaire à la ligne de terre.

Ces deux cas particuliers peuvent servir à résoudre facilement tous les autres.

Application :

Question auxiliaire. Rabattement de la section faite dans un plan quelconque par un plan vertical.

Intersection d'un polyèdre et d'un plan quelconque. Vraie grandeur de la section. On aura recours à un plan auxiliaire de projection perpendiculaire au plan donné.

Intersection d'une droite et d'un plan. — On insistera sur le cas où le plan est donné par deux droites qui se coupent.

Intersection d'une droite et d'un polyèdre.

Applications :

Ombre portée par une pyramide sur une autre pyramide.

Droites et plans perpendiculaires. — Principe fondamental. — Distance d'un point à un plan.

Applications :

1° Déterminer la section droite d'un prisme; 2° construire les projections d'un prisme droit ayant une base sur un plan quelconque donné.

Méthode des rabattements. — Cette méthode sera exposée sur le rabattement d'une face latérale d'une pyramide dont la base est sur le plan horizontal de projection.

Angle de deux droites. Angle de deux plans.

Application :

Construire les angles formés par les arêtes d'une pyramide et les angles dièdres formés par ses faces.

Mouvement de rotation autour d'un axe vertical. Ce mouvement peut remplacer le changement de plan vertical de projection.

Application :

1° Intersection d'une sphère et d'un plan.

2° Application de la section plane d'une sphère à la solution des problèmes suivants :

Construire la courbe de contact d'une sphère avec un cylindre circonscrit parallèle à une direction donnée (ombre propre de la sphère).

Construire la courbe de contact d'une sphère avec un cône circonscrit dont le sommet est donné (ombre au flambeau).

Applications diverses :

Construire la hauteur d'une pyramide déterminée par sa base et les longueurs de trois arêtes latérales.

On donne les projections de deux murs en talus qui se coupent sous un angle quelconque, on demande de déterminer les patrons qui doivent servir à la taille d'une pierre d'angle.